6. 離散型確率変数

1. 相対度数分布表と平均・分散

● 相対度数分布表

(1) 相対度数は確率である。

(2) N 個のデータ x_i を整理して，右の相対度数分布表を得た。このとき，このデータの平均 $\bar{x}$ と分散 ${\sigma_x}^2$ について，以下の等式が成立する。

数値	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
相対度数	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

① $\bar{x} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$

② ${\sigma_x}^2 = (x_1 - \bar{x})^2 p_1 + (x_2 - \bar{x})^2 p_2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2 p_n$

③ ${\sigma_x}^2 = {x_1}^2 p_1 + {x_2}^2 p_2 + \cdots + {x_n}^2 p_n - \bar{x}^2$

(1) 上記(2)の証明は，以下のとおり。

x_i の度数を f_i とすると， $f_i / N = p_i$ であるから，

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots\cdots + x_n f_n)$$
$$= x_1 \times \frac{f_1}{N} + x_2 \times \frac{f_2}{N} + \cdots\cdots + x_n \times \frac{f_n}{N}$$
$$= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots\cdots + x_n p_n$$

$${\sigma_x}^2 = \frac{1}{N}\left\{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2 f_n\right\}$$
$$= (x_1 - \bar{x})^2 \times \frac{f_1}{N} + (x_2 - \bar{x})^2 \times \frac{f_2}{N} + \cdots + (x_n - \bar{x})^2 \times \frac{f_n}{N}$$
$$= (x_1 - \bar{x})^2 p_1 + (x_2 - \bar{x})^2 p_2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2 p_n$$

また，分散の公式より，

$${\sigma_x}^2 = \frac{1}{N}({x_1}^2 f_1 + {x_2}^2 f_2 + \cdots\cdots + {x_n}^2 f_n) - \bar{x}^2$$
$$= {x_1}^2 \times \frac{f_1}{N} + {x_2}^2 \times \frac{f_2}{N} + \cdots\cdots + {x_n}^2 \times \frac{f_n}{N} - \bar{x}^2$$
$$= {x_1}^2 p_1 + {x_2}^2 p_2 + \cdots + {x_n}^2 p_n - \bar{x}^2$$

(2) 上記(2)は，各数値 x_i の相対度数 p_i が分かれば，データ x_i の平均 $\bar{x}$ や分散 ${\sigma_x}^2$ が計算できることを示していまる。

(3) 一方，相対度数 p_i は数値 x_i の割合であるから，確率と見なすことができる。すなわち，

データ x_i から無作為に 1 個の数値を選ぶとき，x_i を選ぶ確率が p_i である。よって，この確率を求めることが重要になる。

■ 例

あるデータ x_i の相対度数分布表が右のようになったとき，データ x_i の平均 $\bar{x}$ と分散 σ_x^2 を求めよ。

数値	0	1	2	計
相対度数	0.25	0.5	0.25	1

＜解＞

$$\bar{x} = 0 \times 0.25 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.25 = 1$$

$$\sigma_x^2 = (0-1)^2 \times 0.25 + (1-1)^2 \times 0.5 + (2-1)^2 \times 0.25 = 0.5$$

（注）分散は次のように計算してもよい。

$$\sigma_x^2 = 0^2 \times 0.25 + 1^2 \times 0.5 + 2^2 \times 0.25 - 1^2 = 0.5$$

2. 離散型確率変数と連続型確率変数

以下の内容は，高校数学 B の「確率分布と統計的な推測」とほぼ同じである。用語・定義・公式をよく理解すること。

● 確率変数 X の定義

(1) 確率変数 X

試行 T の結果（標本点）に対して値が定まる変数 X を，試行 T における「確率変数（random variable）」という。X の値を「X の実現値」ともいう。また，標本点 ω に対して定まる X の実現値を，$X(\omega)$ で表すこともある。確率変数は，通常，X, Y, Z などの大文字で表す。

別の見方をすれば，確率変数 X とは，T の標本空間 Ω における変量のことである。

(2) 離散型確率変数

X がとびとびの値しかとらないとき，X は離散型である，または，X は離散型確率変数であるという。X が整数値しかとらない場合は，X は離散型である。

(3) 連続型確率変数

X が，ある区間内のすべての実数値をとり得るとき，X は連続型である，または，X は連続型確率変数であるという。

■ 例 1（離散型確率変数）

1 個のサイコロを 1 回投げるという試行 T を行い，出る目の数を X とする。試行 T を行ったとき，1 の目が出たら $X = 1$，2 の目が出たら $X = 2$，3 の目が出たら $X = 3$，… となる。

試行Tの結果に対してXの値が定まるので，Xは確率変数である。

Xのとり得る値は，$X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ であり，1の次は(飛んで)2である。Xは1.2356のような値をとらない。Xはとびとびの値しかとらないので，離散型である。

■ 例2（連続型確率変数）

紙テープを目分量で 5cm の長さに切り取るという試行Tを行い，切り取られたテープの長さをX cmとする。試行Tの結果（切り取られた紙テープ）に対してXの値が定まるので，Xは確率変数になる。Xの実現値はおよそ5cm前後であるが，Xは5cm前後のすべての実数値をとり得る。Xが5.123456cmのような値をとっても，おかしくはない。従って，Xは連続型である。

連続型確率変数の話になると積分が登場するが，統計入門の段階では，それらは無視するか，直感的に理解すればよい。まずは，離散型確率変数をよく理解すること。

3. 離散型確率変数

● 離散型確率変数 X

(1) X の確率分布

確率変数Xのとり得る値が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ であり，Xがx_iをとる確率が

$$p_i = P(X = x_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

であるとき，x_iとp_iとの対応関係を，「Xの確率分布」または単に「Xの分布」という。また，確率変数Xはこの分布に従うという。

(2) X の確率分布表

Xの確率分布を示した次の表を，Xの確率分布表という。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

次が常に成り立つ。

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 \quad \text{（確率の合計は 1 ）}$$

(3) X の確率関数

$$f(x) = P(X = x)$$

上記では，Xのとり得る値が有限個なので，Xが離散型の場合である。以下では，試行Tの標本空間Ωは有限集合であるとする。

(1) 上記の確率は，次の意味である。実数aに対して，「Xがaの値をとる」という事象Aの確率$P(A)$を

$$P(X = a)$$

で表す。これを，「$X = a$ となる確率」「X が a の値をとる確率」という。

事象 A は，X の実現値 $X(\omega)$ が a であるような標本点 ω からなる集合である。

実数 a が X の実現値でなければ，$A = \phi$ となるので，$P(X = a) = 0$ となる。

(2) 同様に，「X が a 以下の値をとる」という事象の確率は

$$P(X \leq a)$$

で表され，「X が a 以上 b 以下の値をとる」という事象の確率は

$$P(a \leq X \leq b)$$

で表される。

(3) 任意の実数 x に対して $P(X = x)$ の値が定まるので，$P(X = x)$ は x の関数になる。

$$f(x) = P(X = x)$$

とおき，$f(x)$ を X の確率関数という。この関数を，X の確率分布と呼ぶこともある。

(4) X の実現値が有限個なので，次の①②が定まる。

① X のとり得る異なる値 ：$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$

② X が x_i をとる確率 p_i ：$p_i = P(X = x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$

ここで，試行 T を行ったとき，X が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ のいずれかの値をとる確率は，

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

である。一方，X は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ のいずれかの値を必ずとるので，次が成立する。

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

また，X の確率分布は，次の表の形で表すこともできる。これを X の確率分布表という。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

(5) X の確率分布とは，実現値 x_i と確率 $p_i = P(X = x_i)$ との対応関係のことであり，これを表で示したものが確率分布表である。対応関係は，確率関数 $f(x) = P(X = x)$ でも示される。従って，X の確率分布を求めよという問題に対しては，確率分布表または確率関数を求めればよい。

(6) 離散型確率変数 X においては，X の確率関数 $f(x)$ を求めることと，X の確率分布表を求めることとは同じ意味になる。

■ 例 1

1 個のサイコロを 1 回投げるという試行 T に対して，出る目の数を X で表す。

(1) 試行 T の標本空間は $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ である。

(2)　X のとり得る異なる値は $1, 2, 3, 4, 5, 6$ である。

(3)　X が 1 の値をとる確率（サイコロを投げて 1 の目が出る確率）は，$P(X=1) = 1/6$

(4)　他の確率も同様なので，X の確率分布は次のとおり。（確率の合計は必ず 1）

X	1	2	3	4	5	6	計
P	1／6	1／6	1／6	1／6	1／6	1／6	1

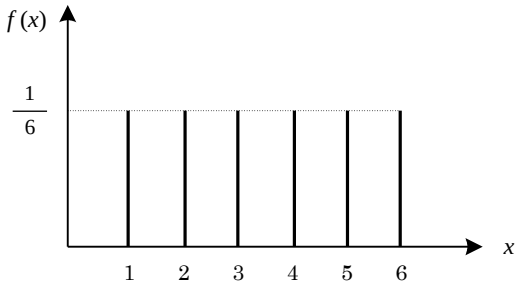
(5)　X が 3 以上 5 以下の値をとる確率は

$$P(3 \le X \le 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

(6)　X の確率関数は

$$f(x) = P(X=x) = \frac{1}{6} \quad (x = 1, 2, \cdots, 6)$$

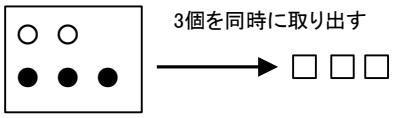
(7)　$f(x)$をグラフで表すと，以下のようになる。この分布では，X の実現値に対して，その確率がすべて 1／6 となり等しい。このような確率分布を「一様分布」という。



■　例２

白玉 2 個と黒玉 3 個の入った袋から，3 個の玉を同時に取り出すとき，出る白玉の個数を X とする。X の確率分布を求めよ。

＜解＞



3 個の玉を同時に取り出すという試行を行うと，X の値が定まるので，X は確率変数である。

袋には白玉は 2 個しかないので，X のとり得る値は，0，1，2 である。

袋から 3 個の玉を同時に取り出す方法は，

$${}_5C_3 = {}_5C_{5-3} = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \text{（通り）}$$

$X = 0$ となる場合は，袋から 3 個の黒玉をとった場合であるから，その場合の数は 1 である。従って，

$$P(X = 0) = \frac{1}{10}$$

$X = 2$ となる場合は，2 個の白玉と 1 個の黒玉を取り出す場合である。2 個の白玉の取り出し方は 1 通り，1 個の黒玉を取り出す方法は 3 通りであるから，

$$P(X = 2) = \frac{1 \times 3}{10} = \frac{3}{10}$$

また，

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$$

であるから，

$$P(X = 1) = 1 - \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10} \right) = \frac{6}{10}$$

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

従って，X の確率分布は，右の表のようになる。

4. 離散型確率変数 Xの確率の意味

● 離散型確率変数の確率の意味

X が離散型確率変数で，標本空間Ωが有限集合の場合，確率 $P(X = a)$ は，次の意味になる。

① $X = a$ となる標本点の個数の割合

② 実現値 a の相対度数

従って，X の確率分布表は，次の意味になる。

○ 実現値ごとの標本点の個数の割合を示した表

○ X のすべての実現値の相対度数分布表

■ 例 1（復習）

次の 6 個の数値がある。

1，　1，　2，　2，　2，　3

この 6 個の数値において，1 の度数は 2，2 の度数は 3，3 の度数は 1 である。度数とは，その数値の個数のことである。総度数，すなわち，度数の合計は 6 である。

1 の相対度数とは，1 の度数の総度数に対する割合である。つまり，1 の個数の全個数 6 に対する割合である。従って，

$$1 \text{ の相対度数} = \frac{1 \text{の度数}}{\text{総度数}} = \frac{2}{6}$$

他も同様であるから，各数値とその相対度数を示した，次の相対度数分布表が得られる。相対度数の合計は，必ず 1 になる。

数値	1	2	3	計
相対度数	2／6	3／6	1／6	1

これは，6 個の数値において，異なる数値 1，2，3 とそれらの割合を表した表である。

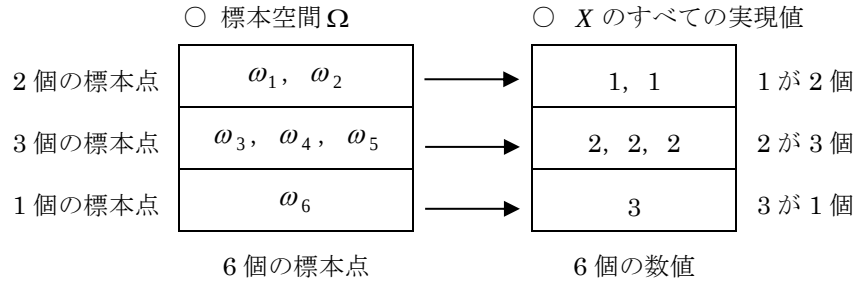
■ 例２

X を，試行 T における確率変数とする。X は確率変数であるから，試行 T を行うと，その結果に対して X の値が定まる。これは，各標本点に対して X の値が定まることと同じ意味である。この X の値を「X の実現値」と言った。

いま，標本点と実現値との対応関係は，次のようになっているとしよう。

標本点	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
X の実現値	1	1	2	2	2	3

これを，さらに詳しく書くと，次のとおり。



ここで，$X = 1$ となる標本点は，ω_1，ω_2 である。よって，確率 $P(X = 1)$ は，事象 $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ の確率であり，

$$P(X = 1) = P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

＝（$X = 1$ となる標本点の個数の全標本点の個数に対する割合）

＝（X のすべての実現値における 1 の相対度数）

＝ 2／6

他の確率も同様であり，X の確率分布表は，次のようになる。

X	1	2	3	計
P	2／6	3／6	1／6	1

この表は，次の 2 通りの視点で読むことができる。

○ 標本空間での実現値ごとの標本点の個数の割合

$X = 1$となる標本点の個数の割合は 2／6，他も同様

○ X のすべての実現値の相対度数分布表

上記の確率分布表は，例 1 の相対度数分布表と全く同じである。つまり，離散的確率変数 X の確率分布表とは，(数学的確率においては) X のすべての実現値の相対度数分布表のことである。

5. 離散型確率変数の平均・分散・標準偏差

● 確率変数の平均・分散・標準偏差

(1) **定義**

確率変数 X の確率分布が右の表のとおりであるとき，X の平均，分散，標準偏差を次のように定義する。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

① **X の平均 $E(X) = \mu$**

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_i x_i p_i$$

② **X の分散 $V(X) = \sigma^2$**

$$V(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n$$
$$= \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$$

③ **X の標準偏差 $\sigma(X) = \sigma$**

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

(2) 上記は，次の意味になる。

① X の平均 $E(X)$ … X のすべての実現値の平均
② X の分散 $V(X)$ … X のすべての実現値の分散
③ X の標準偏差 $\sigma(X)$ … X のすべての実現値の標準偏差

すなわち，X のすべての実現値の平均を $\bar{x}$，分散を ${\sigma_x}^2$，標準偏差を σ_x とすると，

$$E(X) = \bar{x}, \quad V(X) = {\sigma_x}^2, \quad \sigma(X) = \sigma_x$$

上記は，離散型確率変数の平均・分散・標準偏差の定義だが，その確率分布表が相対度数分布表であるから，上記の(2)は自明になる。なお，X の平均は，X の期待値ともいう。

■ 例

確率変数 X の確率分布が右のとおりであるとき，X の平均 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

X	0	1	2	計
P	0.25	0.5	0.25	1

＜解＞

$$E(X) = 0 \times 0.25 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.25 = 1$$

$$V(X) = (0 - 1)^2 \times 0.25 + (1 - 1)^2 \times 0.5 + (2 - 1)^2 \times 0.25 = 0.5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.5} \fallingdotseq 0.71$$

6. 確率変数の関数

● 確率変数の関数

確率変数 X の任意の関数 $\varphi(X)$ について，次が成り立つ。

(1) $\varphi(X)$ は確率変数になる。

(2) X の確率分布が右のとおりであるとき，

X	x_1	x_2	…	x_n	計
P	p_1	p_2	…	p_n	1

$\varphi(X)$ の平均は

$$E(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i = \varphi(x_1) p_1 + \varphi(x_2) p_2 + \cdots + \varphi(x_n) p_n$$

X の関数 $\varphi(X)$ とは，次のような，X から作られた式のこのである。

$\varphi(X)$ の例 ： $2X$ ， $\frac{1}{2}X$ ， $3X + 5$， X^2， $X^2 + X + 1$

試行の結果に対して X の値が定まるので，$\varphi(X)$ の値も定まる。従って，$\varphi(X)$ も確率変数になる。例えば，

$$\varphi(X) = 3X + 5$$

とすれば，$X = 1$ のときは，$\varphi(X)$ の値は

$$\varphi(1) = 3 \times 1 + 5 = 8$$

になり，$\varphi(X)$ の値も定まる。

(2)の証明も容易である。具体例で確認してみよう。(一般的な証明は練習問題)

X の確率分布は右のとおりとし，X の実現値が

1， 1， 2， 2， 2， 3

であるとすれば，X の平均は

X	1	2	3	計
P	2／6	3／6	1／6	1

$$E(X) = 1 \times \frac{2}{6} + 2 \times \frac{3}{6} + 3 \times \frac{1}{6} \quad \cdots\cdots \quad ①$$

一方，$\varphi(X)$ の実現値は

$\varphi(1)$，$\varphi(1)$，$\varphi(2)$，$\varphi(2)$，$\varphi(2)$，$\varphi(3)$

であり，これらの平均が $\varphi(X)$ の平均であるから，

$$E(\varphi(X)) = \frac{1}{6}\left\{\varphi(1)\times 2 + \varphi(2)\times 3 + \varphi(3)\times 1\right\}$$

$$= \varphi(1)\times\frac{2}{6} + \varphi(2)\times\frac{3}{6} + \varphi(3)\times\frac{1}{6}$$

この最後の式は，①の式において，X の実現値 1，2，3 を，$\varphi(X)$ の実現値 $\varphi(1)$，$\varphi(2)$，$\varphi(3)$ に置き換えているだけである。

なお，(2)において，

$\varphi(x_1)$，$\varphi(x_2)$，…，$\varphi(x_n)$

がすべて異なれば，$\varphi(X)$ の確率分布は右のようになる。

$\varphi(X)$	$\varphi(x_2)$	$\varphi(x_2)$	…	$\varphi(x_n)$	計
P	p_1	p_2	…	p_n	1

しかし，$\varphi(x_1)$，$\varphi(x_2)$，…，$\varphi(x_n)$ の中に等しいものがあれば，$\varphi(X)$ の確率分布は上記のようにはならないことに注意しよう。

7. 確率変数の分散と平均との関係

● 確率変数の分散と平均との関係

確率変数 X の分散 $V(X)$ は，確率変数 $(X-\mu)^2$ の平均である。すなわち，次が成り立つ。ただし，$E(X) = \mu$ である。

$$V(X) = E((X-\mu)^2)$$

X	x_1	x_2	…	x_n	計
P	p_1	p_2	…	p_n	1

（証明）

$\varphi(X) = (X-\mu)^2$ とおくと，$\varphi(x_i) = (x_i-\mu)^2$

$E(X) = \sum_i x_i p_i$ であるから，

$$E((X-\mu)^2) = E(\varphi(X)) = \sum_i \varphi(x_i)p_i = \sum_i (x_i-\mu)^2 p_i = V(X)$$

8. 確率変数の分散の公式

● 確率変数の分散の公式

確率変数 X の分散 $V(X)$ について，次の等式が成り立つ。

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

上記の公式も，データの分散の公式ですでに証明されている。すなわち，X のすべての実現値を x_i とすると，$E(X^2)$ は実現値の 2 乗 ${x_i}^2$ の平均であるから，$E(X^2) = \overline{x^2}$ である。

従って，

$$V(X) = \sigma_x^{\,2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

なお，$\varphi(X) = X^2$ とおけば，$\varphi(x_i) = x_i^{\,2}$ であるから，前述の「確率変数の関数」より，次のようになる。

X の平均　　$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$

X^2 の平均　　$E(X^2) = x_1^{\,2} p_1 + x_2^{\,2} p_2 + \cdots + x_n^{\,2} p_n$

■ 例

確率変数 X の確率分布が，右のようになっているとき，X の分散と標準偏差を求めよ。

X	1	3	5	計
P	0.6	0.3	0.1	1

＜解＞

X および X^2 の平均は，

$$E(X) = 1 \times 0.6 + 3 \times 0.3 + 5 \times 0.1 = 2$$

$$E(X^2) = 1^2 \times 0.6 + 3^2 \times 0.3 + 5^2 \times 0.1 = 5.8$$

よって，X の分散は，公式より

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 5.8 - 2^2 = 1.8$$

従って，X の標準偏差は，$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.8} \fallingdotseq 1.34$

9. 確率変数の 1 次変換

● 確率変数の 1 次変換（公式）

X を確率変数，a, b を定数とするとき，次が成り立つ。

(1)　$E(aX + b) = aE(X) + b$

(2)　$V(aX + b) = a^2 V(X)$

(3)　$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$

(1)　一般に，確率変数 X から，

$$Y = aX + b \quad (a, b \text{ は定数})$$

によって，確率変数 Y をつくることを，X の 1 次変換という。（データの場合と同様）

(2)　確率変数の平均や分散の定義に従って証明すると，次のとおり。

X の確率分布が右のとおりであるとする。

$\sum_{i=1}^{n}$ を $\sum_{i}$ で表すと，$\sum_{i} p_i = 1$ より，

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$E(aX+b)=\sum_i (ax_i+b)p_i = a\sum_i x_i p_i + b\sum_i p_i = aE(X)+b$$

$Y=aX+b$，$E(X)=\mu$ とおくと，$E(Y)=a\mu+b$ より，

$$Y-E(Y)=(aX+b)-(a\mu+b)=a(X-\mu)$$

従って，

$$V(aX+b)=V(Y)=E((Y-E(Y))^2)=E(a^2(X-\mu)^2)$$
$$=a^2E((X-\mu)^2)=a^2V(X)$$

$$\sigma(aX+b)=\sqrt{V(aX+b)}=\sqrt{a^2V(X)}=|a|\sqrt{V(X)}=|a|\sigma(X)$$

(3) (2)のように証明できるが，実際にはすでに証明している。1 次変換 $Y=aX+b$ は，X の実現値を 1 次変換しているにすぎない。すなわち，X のすべての実現値を x_i で表せば，$aX+b$ のすべての実現値は ax_i+b で表現される。ここで，

$$y_i = ax_i + b$$

とおけば，y_i が Y のすべての実現値である。よって，データの場合の 1 次変換の公式より，

$$E(aX+b)=E(Y)=\bar{y}=a\bar{x}+b=aE(X)+b$$
$$V(aX+b)=V(Y)=\sigma_y{}^2=a^2\sigma_x{}^2=a^2V(X)$$
$$\sigma(aX+b)=\sigma(Y)=\sigma_y=|a|\sigma_x=|a|\sigma(X)$$

■ 例

確率変数 X について，X の平均を μ，X の標準偏差を σ とするとき，(1)～(6)を μ と σ で表せ。

(1) $E(2X-6)$　(2) $V(2X-6)$　(3) $\sigma(2X-6)$

(4) $E(-2X+6)$　(5) $V(-2X+6)$　(6) $\sigma(-2X+6)$

＜解＞

仮定より，$E(X)=\mu$，$\sigma(X)=\sigma$，$V(X)=\sigma^2$ である。公式を忠実に使うと，

(1) $E(2X-6)=E(2X+(-6))=2E(X)+(-6)=2\mu-6$

(2) $V(2X-6)=2^2V(X)=4\sigma^2$

(3) $\sigma(2X-6)=|2|\sigma(X)=2\sigma$

(4) $E(-2X+6)=E((-2)X+6)=(-2)E(X)+6=-2\mu+6$

(5) $V(-2X+6)=(-2)^2V(X)=4\sigma^2$

(6) $\sigma(-2X+6)=|-2|\sigma(X)=2\sigma$

（注意）次のように覚えればよい。

・$2X-6$ の平均は，X に X の平均を代入するだけ

・$2X-6$ の分散は，もとの分散 σ^2 の $4(=2^2)$ 倍

・$2X-6$の標準偏差は，もとの標準偏差σの2倍

10. 確率変数の標準化

● 確率変数の標準化

確率変数Xの平均がμ，標準偏差がσであるとき，

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

とおくと，確率変数Zについて次が成り立つ。

平均 $E(Z)=0$，　標準偏差 $\sigma(Z)=1$

データの場合と全く同様である。上記の確率変数Zを，Xの標準測度（標準化変量）という。また，XからZをつくることを，Xを標準化するという。

標準化は特別な1次変換であり，これを「Xの標準化変換」という。どのような確率変数も標準化してしまえば，平均は0，標準偏差は1になる。

上記の証明は容易である。Zは

$$Z = \frac{1}{\sigma}\cdot X + \left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

と変形でき，σ，μは定数であるから，ZはXの1次式である。従って，

$$Z = aX + b \quad （ここで\ a = \frac{1}{\sigma},\ b = -\frac{\mu}{\sigma}）$$

と表され，$E(X)=\mu$，$V(X)=\sigma^2$ であるから，1次変換の公式より

$$E(Z) = aE(X) + b = \frac{1}{\sigma}\times\mu + \left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = 0$$

$$V(Z) = a^2V(X) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2\times\sigma^2 = 1$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{1} = 1$$

11. 偏差値

n個の点数に対して，各点数の偏差値を考えることができた。そして，n個の偏差値の平均は常に50，標準偏差は常に10であった。同様に，確率変数Xの値が試験の点数のとき，Xの偏差値を考えることができる。

● **偏差値**

確率変数 X の平均を μ，標準偏差を σ とする。 X の値が試験の点数のとき，

$$T = \frac{X - \mu}{\sigma} \times 10 + 50$$

を， X の偏差値と呼ぶ。 T は確率変数になり，次が常に成り立つ。

平均 $E(T) = 50$， 標準偏差 $\sigma(T) = 10$

証明は次のとおり。 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ とおくと，

$$E(T) = E(10Z + 50) = 10E(Z) + 50 = 10 \times 0 + 50 = 50$$

$$\sigma(T) = 10\,\sigma(Z) = 10 \times 1 = 10$$