数列

1. 数列とは

(1) 自然数を 1 から順に書き並べると，

1，2，3，4，5，……

また，1 からはじめて，$\frac{1}{2}$ を次々に掛けて得られる数を順に書き並べると，

1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，……

このように，ある規則に従って並べた数の列を「数列」といい，数列を構成するおのおのの数を数列の「項」という。

(2) 数列において，最初の項を「第 1 項」，2 番目の項を「第 2 項」，…，n 番目の項を「第 n 項」という。特に，第 1 項を「初項」という。例えば，数列

1，3，5，7，……

において，初項は 1，第 2 項は 3，第 3 項は 5，第 4 項は 7，…… である。

(3) 数列において，項の個数を「項数」という。項数が有限である数列を「有限数列」，項数が無限である数列を「無限数列」という。有限数列の場合，最後の項を「末項（まっこう）」という。

有限数列： 2，4，6，8　　（初項は 2，項数は 4，末項は 8）

無限数列： 2，4，6，8，……　（初項は 2，項は限りなく続くので末項はない）

(4) 一般に，数列を

$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$

のように表す。この場合，初項は a_1，第 2 項は a_2 である。この数列を $\{a_n\}$ で表す。

(5) また，以下のような表現で，数列を表すこともある。

① $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ → 無限数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ を表す（∞ は，無限大と読む）

② $\{a_n\}_{n=2}^{5}$ → 有限数列 a_2, a_3, a_4, a_5 を表す（初項は a_2，末項は a_5）

③ $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ → 無限数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ を表す（初項は a_0）

④ $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ → 無限数列 $a_2, a_4, a_6, \cdots\cdots, a_{2n}, \cdots\cdots$ を表す（初項は a_2）

(6) ただし，特に説明がなければ，数列 $\{a_n\}$ は，

$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$（有限数列または無限数列）

であると解釈してよい。

(7) 数列$\{a_n\}$の第n項a_nがnの式で表されるとき，a_nを「一般項」という。例えば，偶数を並べてできる数列

2，4，6，8，……

は，次のように表すことができるので，一般項は $a_n = 2n$ である。

2 × 1，2 × 2，2 × 3，2 × 4，……

この数列を $\{2n\}$ とも表す。

（例）一般項が $a_n = 3n - 1$ である数列では

初項は　$a_1 = 3\times1-1 = 2$

第2項は　$a_2 = 3\times2-1 = 5$

第3項は　$a_3 = 3\times3-1 = 8$

■ 問題　次の数列の初項から第5項までを求めよ。

(1) $\{1-2n\}$　(2) $\{2^n\}$　(3) $\{(-1)^n\}$

（解）

(1) $1-2n$ において，$n=1, 2, 3, 4, 5$を順に代入すると

$1-2\times1=-1$，$1-2\times2=-3$，$1-2\times3=-5$，$1-2\times4=-7$，$1-2\times5=-9$

よって，−1，−3，−5，−7，−9

(2) 2^n において，$n=1, 2, 3, 4, 5$を順に代入すると

$2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=32$

よって，2，4，8，16，32

(3) $(-1)^n$ において，$n=1, 2, 3, 4, 5$を順に代入すると

$(-1)^1=-1$，$(-1)^2=1$，$(-1)^3=-1$，$(-1)^4=1$，$(-1)^5=-1$

よって，−1，1，−1，1，−1

2. 数列の第n部分和

数列 $\{a_n\}$ において，初項から第n項までの和を「第n部分和」といい，S_nで表す。すなわち

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n$$

ここで，$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$とおくと

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

……

$n \geq 2$ のとき $S_n = S_{n-1} + a_n$ であるから，次が成り立つ。

① $a_1 = S_1$　　② $n \geq 2$ のとき，$a_n = S_n - S_{n-1}$

（例）数列$\{a_n\}$において，第n部分和が $S_n = n^2$のとき，一般項a_nを求めよ。

（解）

$n = 1$のとき，

$$a_1 = S_1 = 1^2 = 1$$

$n \geq 2$ のとき，

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$$

よって，$a_n = 2n - 1$ であるが，これは $n = 1$ のときにも成立する。従って，一般項は

$$a_n = 2n - 1$$

3. 等差数列

● 等差数列

(1)（定義）等差数列 $\{a_n\}$ とは，各項に一定の数d を加えると，次の項が得られる数列。

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} - a_n = d \ \text{（一定数）}$$

d を公差という。

(2)（一般項）初項a，公差d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

(3)（等差数列の和）初項a，公差d，末項l，項数n の等差数列の第n部分和をS_nとすると

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

(4) 特に，1 からnまでの自然数の和は

$$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

数列 1，3，5，7，9，11，…… は，初項 1 に次々に一定の数 2 を加えて得られる数列である。

同様に，数列 10，6，2，−2，−6，−10，…… は，初項 10 に次々に一定の数 −4 を加えて得られる数列である。

一般に，数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…… の各項が，すぐ前の項に一定の数d を加えて得られるとき，すべての番号nについて

$$a_{n+1} - a_n = d$$

という関係が成り立つ。このような数列を「等差数列」といい，d をこの等差数列の「公差」という。

初項が a，公差が d である等差数列 $\{a_n\}$ の各項は，順に

$$a_1 = a,\ a_2 = a + d,\ a_3 = a + 2d,\ a_4 = a + 3d,\ \cdots\cdots$$

であるから，第 n 項は，次の式で表される。

$$a_n = a + (n-1)d$$

■ **例１**　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
(1)　初項 4，公差 3　　(2)　初項 3，公差−5

（解）

(1)　$a_n = 4 + (n-1)\times 3 = 3n + 1$

(2)　$a_n = 3 + (n-1)\times(-5) = -5n + 8$

等差数列の第 n 部分和は，次のようにして容易に求めることができる。

初項が a，公差が d，項数が n である等差数列の末項を l，第 n 部分和を S_n とすると，

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots\cdots + (l-d) + l \quad \cdots\cdots ①$$

項の順番を逆にして和を作ると，

$$S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \cdots\cdots + (a+d) + a \quad \cdots\cdots ②$$

① ＋ ②より，

$$2S_n = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots\cdots + (a+l) + (a+l)$$

右辺は，$(a+l)$ が n 個あるから，

$$2S_n = n(a+l) \qquad \therefore\ S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

また，l は第 n 項であるから，

$$l = a + (n-1)d \qquad \therefore\ S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

例えば，1 から n までの自然数 1，2，3，……，n は，初項 $a = 1$，末項 $l = n$，項数 n の等差数列であるから，その和は

$$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

■ **例２**　次の等差数列の和 S を求めよ。
(1)　初項 30，末項 2，項数 15　　(2)　初項−2，公差 4，項数 32

（解）

(1)　項数が $n = 15$，初項が $a = 30$，末項が $l = 2$ であるから，

$$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{15}{2}(30 + 2) = 15\times 16 = 240$$

(2) 項数が $n=32$，初項が $a=-2$，公差が $d=4$ であるから，

$$S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = \frac{32}{2}\{2\times(-2)+(32-1)\times 4\} = 16(-4+124) = 1920$$

■ **例３** 1からはじめて n 番目までの奇数の和 S を求めよ。

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots\cdots + (2n-1)$$

（解）

初項 a が 1，公差 d が 2，項数が n，末項 l が $2n-1$ の等差数列の和であるから，

$$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{n}{2}\{1+(2n-1)\} = n^2$$

4. 等比数列

● **等比数列**

(1)（定義）等比数列 $\{a_n\}$ とは，各項に一定の数 r を掛けると，次の項が得られる数列。

$$a_{n+1} = ra_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

r を公比という。

(2)（一般項）初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = ar^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3)（等比数列の和）初項 a，公比 r の等比数列の第 n 部分和を S_n とすると

① $r \neq 1$ のとき，$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

② $r = 1$ のとき，$S_n = na$

数列 1, 2, 4, 8, 16, 32, …… は，初項 1 に次々に一定の数 2 を掛けて得られる数列である。

同様に，数列 1, −2, 4, −8, 16, −32, …… は，初項 1 に次々に一定の数−2 を掛けて得られる数列である。

一般に，数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…… の各項が，すぐ前の項に一定の数 r を掛けて得られるとき，すべての番号 n について

$$a_{n+1} = ra_n$$

という関係が成り立つ。このような数列を「等比数列」といい，r をこの等比数列の「公比」という。

初項が a，公比が r の等比数列 $\{a_n\}$ の各項は，順に

$$a_1 = a,\ a_2 = ar,\ a_3 = ar^2,\ a_4 = ar^3,\ \cdots\cdots$$

であるから，その一般項は，次の式で表される。

$$a_n = ar^{n-1}$$

■ **例１**　次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　初項－4，公比 2　　(2)　初項 5，公比－3

（解）

(1)　$a_n = (-4)\times 2^{n-1}$

(2)　$a_n = 5\times(-3)^{n-1}$

■ **例２**

(1)　初項が 162，公比が $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列の第 5 項を求めよ。

(2)　初項が 3，公比が 2，末項が 48 である等比数列の項数を求めよ。

（解）

(1)　初項が $a=162$，公比が $r=-\dfrac{1}{3}$ であるから，第 n 項 a_n は

$$a_n = ar^{n-1} = 162\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，第 5 項は

$$a_5 = 162\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{5-1} = 162\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{4} = 162\times\frac{1}{3^4} = 2$$

(2)　初項は $a=3$，公比は $r=2$ である。求める項数を n とすると，第 n 項が末項の 48 であるから

$$ar^{n-1} = 48 \qquad \therefore\ 3\times 2^{n-1} = 48$$

よって，$2^{n-1} = 16 = 2^4$ であるから，$n-1=4$　$\therefore\ n=5$

等比数列の第 n 部分和は，次のようにして求めることができる。

初項が a，公比が r の等比数列の第 n 部分和を S_n とすると，

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} \qquad \cdots\cdots ①$$

両辺に r を掛けると

$$rS_n = \quad ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots\cdots ②$$

①－②より，

$$S_n - rS_n = a - ar^n \qquad \therefore\ (1-r)S_n = a(1-r^n)$$

従って，$r\neq 1$ のときは，

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

また，$r=1$ のときは，各項はすべて a であるから

$$S_n = a + a + \cdots\cdots + a = na$$

■ 例３

(1) 初項 3，公比 4 の等比数列の第 n 部分和 S_n を求めよ。

(2) 等比数列 1，a，a^2，…… の第 n 部分和 S_n を求めよ。

（解）

(1) 初項が $a = 3$，公比が $r = 4$ だから

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{3(4^n - 1)}{4 - 1} = 4^n - 1$$

(2) 初項が 1，公比が a であるから

（イ） $a = 1$ のとき

$$S_n = 1 + 1 + \cdots\cdots + 1 = n$$

（ロ） $a \neq 1$ のとき

$$S_n = \frac{1(a^n - 1)}{a - 1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

5. 和の記号 Σ

n 個の数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を，$\sum_{i=1}^{n} a_i$ で表す。すなわち

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Σ は，シグマと読む。和は英語で sum というが，その最初の文字 s に対応するギリシア文字が，大文字では Σ，小文字では σ （シグマ）である。

i を a_i の添え字（そえじ：index）という。従って，

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ は，a_i の添え字 i に $1, 2, \cdots, n$ を代入したものの和

である。添え字は i である必要はなく，r や k などの他の文字でもかまわない。よって

$\sum_{r=1}^{n} a_r$ も，a_r の添え字 r に $1, 2, \cdots, n$ を代入したものの和

を意味し，

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

となる。さらに，添え字の最初の値も 1 である必要はない。

（例）

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{i=2}^{n} a_i = a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n\cdot(n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{3} r^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3$$

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ は，$\sum_{i=1}^{n} a_i$ とも書く。また，添え字 i のとる値の範囲がはっきりと分かっている場合，それを省略して，$\sum_{i=1}^{n} a_i$ を単に，$\sum_{i} a_i$ または $\sum a_i$ と書くこともある。

6. Σに関する公式

n 個の数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ において，各 a_i が同じ値 c をとる場合，すなわち

$$a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_n = c$$

のとき，

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = c + c + \cdots + c = nc$$

となる。ここで，$\sum_{i=1}^{n} a_i$ は $\sum_{i=1}^{n} c$ と書けるから，c が i に無関係な定数のときは，$\sum_{i=1}^{n} c$ は c の n 個の和 $c + c + \cdots + c$ を意味する。

● **Σに関する基本公式（n は自然数）**

(1) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$　　(2) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

(3) $\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$（$c$ は定数）　(4) $\sum_{i=1}^{n} c = c + c + \cdots + c = nc$（$c$ は定数）

(5) $\sum_{i=1}^{n} (p a_i + q b_i) = p \sum_{i=1}^{n} a_i + q \sum_{i=1}^{n} b_i$（$p, q$ は定数）　(6) $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

(1)～(3)を証明しておく。

(1) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

(2) $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n)$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

(3) $\sum_{i=1}^{n} c a_i = c a_1 + c a_2 + \cdots + c a_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c \sum_{i=1}^{n} a_i$

7. よく使われる公式

一般に，数 a に対して，$a \times a = a^2$ を，a の 2 乗（a の自乗，a の平方）と呼ぶ。同様に，$a \times a \times a = a^3$ を，a の 3 乗（a の立方）と呼ぶ。次はよく使用される公式である。

● 数列の和

(1) 自然数の和

$$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

(2) 自然数の平方和

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

(3) 自然数の立法和

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

上記の(1)は証明したので，(2)と(3)の証明を簡単に説明しておく。Σにおいて，添え字 k は常に 1 から n なので，n は略記する。

(2) $3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 - k^3$ より，

$$3\sum_k k^2 + 3\sum_k k + \sum_k 1 = \sum_k (k+1)^3 - \sum_k k^3 = (n+1)^3 - 1^3$$

よって，次の等式が得られ，証明される。

$$3\sum_k k^2 = (n+1)^3 - 1^3 - \left\{ \frac{3}{2} n(n+1) + n \right\} = \frac{n}{2}(n+1)(2n+1)$$

(3) $4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 = (k+1)^4 - k^4$ より，

$$4\sum_k k^3 + 6\sum_k k^2 + 4\sum_k k + \sum_k 1 = \sum_k (k+1)^4 - \sum_k k^4 = (n+1)^4 - 1^4$$

よって，次の等式が得られ，証明される。

$$4\sum_k k^3 = (n+1)^4 - 1^4 - \{ n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n \} = n^2(n+1)^2$$

■ 例

(1) $a_k = 3k^2 - 7k + 4$ のとき，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

(2) $\sum_{i=1}^{n} i(i+2)$ を求めよ。

（解）

(1) $$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 7k + 4) = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 - \sum_{k=1}^{n} 7k + \sum_{k=1}^{n} 4 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 7\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 4$$

$$= 3 \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 7 \times \frac{1}{2} n(n+1) + 4n$$

$$= \frac{1}{2} n \left\{ (n+1)(2n+1) - 7(n+1) + 8 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} n \left\{ (n+1)(2n+1) - 7(n+1) + 8 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} n (2n^2 - 4n + 2) = n(n^2 - 2n + 1)$$

$$= n(n-1)^2$$

(2) $\sum_{i=1}^{n}$ を $\sum_{i}$ と略記すると

$$\sum_{i} i(i+2) = \sum_{i} (i^2 + 2i) = \sum_{i} i^2 + 2\sum_{i} i$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 2 \times \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1) \left\{ (2n+1) + 6 \right\}$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+7)$$