11. 統計的推定

1. 統計量

● 統計的推測

(1) 統計的推測には，「推定」と「検定」という 2 つの大きな分野がある。

(2) 統計的推定（statistical estimation）とは，標本から未知母数を推定することである。単に「推定」ともいう。推定には，「点推定」と「区間推定」がある。

(3) 統計的仮説検定（testing statistical hypothesis）とは，未知母数に関する仮説を立てて，仮説の正当性を標本から判定することである。単に「検定」ともいう。

● 統計量

(1) 標本変量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ から作られる式

$$T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

を「統計量」という。統計量は，確率変数になる。

(2) 統計量の確率分布を「標本分布」という。

(3) 推定と検定では，各種の統計量が使用される。以下は主な統計量である。

① **標本平均** $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

② **標本分散** S^2

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2\}$$

③ **標本標準偏差** S

$$S = \sqrt{S^2}$$

④ **不偏分散** U^2

$$U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2\}$$

$$U^2 = \frac{n}{n-1}S^2$$

⑤ **不偏標準偏差** U

$$U = \sqrt{U^2}$$

(1) 母数とは，母平均や母分散など，母集団から定まる定数のことである。これまで，母平均や母分散の値は，すでに分かっているものと仮定して議論したが，実際には分からない場合

がほとんどである。値が分かっている母数を「既知母数」，値が分かっていない母数を「未知母数」という。統計的推測では，各種の統計量を考え，その実現値から未知母数を推測する。

(2)　標本分散 S^2 については，次の公式が成り立つ。データの場合と同様である。

$$S^2 = \frac{1}{n}(X_1{}^2 + X_2{}^2 + \cdots + X_n{}^2) - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_i X_i{}^2 - \overline{X}^2$$

（証明）(2)を確認しておく。$\sum_i X_i = n\overline{X}$ に注意すると，

$$\begin{aligned} nS^2 &= \sum_i (X_i - \overline{X})^2 = \sum_i (X_i{}^2 - 2\overline{X}X_i + \overline{X}^2) \\ &= \sum_i X_i{}^2 - 2\overline{X}\sum_i X_i + \sum_i \overline{X}^2 = \sum_i X_i{}^2 - 2n\overline{X}^2 + n\overline{X}^2 \\ &= \sum_i X_i{}^2 - n\overline{X}^2 \quad \text{（あとは} n \text{で割ればよい）} \end{aligned}$$

2.　統計量と実現値の名称

(1)　統計的推測では，統計量に関する名称は，その統計量の実現値に対しても使われる。従って，その名称が，確率変数なのか，実現値なのか，どちらを指しているのかに注意する必要があるが，たいていの場合は文脈から判断できる。

(2)　例えば，大きさ n の標本 $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ から定まる特性値の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を，「標本値」「標本の実現値」と呼ぶ。この標本値から定まる標本平均 $\overline{X}$ の実現値は

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i$$

である。また，標本分散 S^2 の実現値は

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

である。$\bar{x}$ や s^2 は，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の通常の平均・分散のことであるが，この実現値 $\bar{x}$ を「標本平均」，s^2 を「標本分散」というわけである。

名称は同じであるが，通常，確率変数は大文字であり，その実現値は以下のように小文字で表される。

① **標本平均** $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

② **標本分散** s^2

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\left\{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right\}$$

③ **標本標準偏差** s

$$s = \sqrt{s^2}$$

④　**不偏分散（不偏標本分散）** u^2

$$u^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left\{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right\}$$

（注意）$u^2 = \dfrac{n}{n-1} s^2$

⑤　**不偏標準偏差** u

$$u = \sqrt{u^2}$$

■　例題

得られた標本値 1，2，3 に対して，標本平均$\bar{x}$，標本分散s^2，標本標準偏差s，不偏分散u^2，不偏標準偏差u を求めよ。

＜解＞

標本平均$\bar{x}$ は，標本値 1，2，3 の平均のことであるから，$\bar{x} = 2$

標本分散s^2 は，標本値 1，2，3 の分散であるから，分散の公式より

$$s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^2) - 2^2 = \frac{2}{3}$$

標本標準偏差s は　　$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

不偏分散u^2 は　　$u^2 = \dfrac{3}{3-1} s^2 = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{2}{3} = 1$

不偏標準偏差u は　　$u = \sqrt{u^2} = \sqrt{1} = 1$

3.　標本分散と不偏分散の平均

●　定理（標本分散と不偏分散の平均）

母平均μ，母分散σ^2 の母集団からの大きさn の標本変量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$から，次の 2 つの統計量を考えるとき，これらの平均は，以下の(1)(2)のようになる。

標本分散　　$S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_i (X_i - \bar{X})^2$

不偏分散　　$U^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \bar{X})^2$

(1)　$E(S^2) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$　　　(2)　$E(U^2) = \sigma^2$

（証明）

重要な定理である。証明は以下のとおり。まず，次が成立する。（テキスト p.90 参照）

$$E(X_i) = E(X) = \mu, \quad V(X_i) = V(X) = \sigma^2 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$E(\overline{X}) = \mu, \quad V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_i X_i^2 - \overline{X}^2$$

一般に，確率変数Yについて，分散の公式より，$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$ であるから，

$$E(Y^2) = E(Y)^2 + V(Y)$$

従って，

$$E(X_i^2) = E(X_i)^2 + V(X_i) = \mu^2 + \sigma^2$$

$$E(\overline{X}^2) = E(\overline{X})^2 + V(\overline{X}) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

よって，

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i^2 - \overline{X}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_i E(X_i^2) - E(\overline{X}^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_i (\mu^2 + \sigma^2) - \left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$= (\mu^2 + \sigma^2) - \left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

従って，(1)が証明された。

これにより，

$$E(U^2) = E\left(\frac{n}{n-1}S^2\right) = \frac{n}{n-1}E(S^2)$$

$$= \frac{n}{n-1} \times \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

これで，(2)も証明された。

4. 点推定

● 点推定

(1) 母集団の未知母数θを，1つの値で推定することを「点推定」という。

(2) θを推定するための統計量 $T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ をθの「推定量」，標本値 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ から定まるTの実現値 $T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ をθの「推定値」という。

(3) 推定量Tによるθの点推定とは，θの推定値を求めることである。

(4) θの推定量 $T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ が

$E(T) = \theta$ （確率変数Tの平均がθに等しい）

をみたすとき，Tは不偏性をもつという。このTをθの「不偏推定量」，Tの実現値をθの「不偏推定値」という。

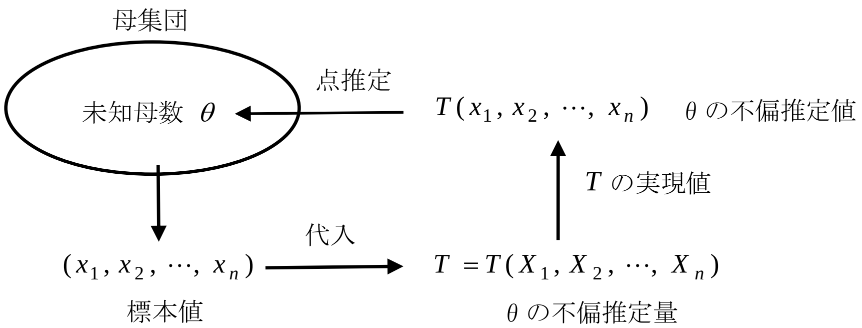
(1)　点推定とは，「母平均は 10 という値で推定できる」というように，未知母数を 1 つの数値で推定することである。

(2)　点推定では，未知母数θを推定するための統計量（θの推定量）

$$T = T(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$$

を考え，得られた標本値（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）から定まるTの実現値$T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$で推定する。この実現値をθの推定値という。

(3)　θの推定量Tが，$E(T) = \theta$ を満たすとき，Tを「θの不偏推定量」，標本値から定まるTの実現値を「θの不偏推定値」という。一般に，点推定は不偏推定量を用いて推定される。



● **定理**

母平均μ，母分散σ^2の母集団について，以下が成り立つ。

(1)　標本平均$\overline{X}$は，母平均μの不偏推定量である。

(2)　標本分散S^2は，母分散σ^2の不偏推定量ではない。

(3)　不偏分散U^2は，母分散σ^2の不偏推定量である。

● **母平均μと母分散σ^2の点推定**

(1)　一般に，標本平均$\overline{X}$の実現値 $\overline{x}$ を，母平均μの不偏推定値とする。

(2)　一般に，不偏分散U^2の実現値 u^2 を，母分散σ^2の不偏推定値とする。

(1)　標本平均$\overline{X}$については，常に

$$E(\overline{X}) = E(X) = \mu$$

が成立した。よって，$\overline{X}$ は μ の不偏推定量であり，標本から得られる $\overline{X}$ の実現値が μ の不偏推定値になる。

ところが，前述の定理より，標本分散 S^2 は，母分散 σ^2 の不偏推定量にはならない。そのかわりに，$n-1$ で割った不偏分散 U^2 が，σ^2 の不偏推定量になる。従って，U^2 の実現値は，σ^2 の不偏推定値になる。

(2) 統計学の解説書によっては，不偏分散値が σ^2 の不偏推定値になるという理由から，通常の分散 ${\sigma_x}^2$ を不偏分散の意味で説明し，

$$ {\sigma_x}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 $$

と定義しているものも多数ある。ただし，n で割る通常の分散 ${\sigma_x}^2$ は，記述統計では重要な値なので，通常の分散と不偏分散は区別して理解した方がよい。

(3) 1 つの母数に対して，その不偏推定量は無数にある。例えば，標本のサイズを 2，標本変量を (X_1, X_2) とすると，標本平均

$$ \overline{X} = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 $$

は，母平均 μ の不偏推定量だが，次の統計量 T も μ の不偏推定量になる。

$$ T = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2 $$

実際，T の平均を計算すれば，

$$ E(T) = \frac{1}{3}E(X_1) + \frac{2}{3}E(X_2) = \frac{1}{3}\mu + \frac{2}{3}\mu = \mu $$

(4) ただし，点推定では，適切な性質をもつ推定量で推定するのが望ましいとされる。詳細は略すが，適切な性質には，「不偏性」のほかに「一致性」「有効性」などもある。

前述したように，母数 θ に対して，$E(T) = \theta$ を満たす推定量 T が，不偏推定量である。また，標本のサイズ n を大きくすると，T の実現値が限りなく θ に近づくとき，推定量 T を「一致推定量」という。さらに，不偏推定量 T の中で，その分散 $V(T)$ が最小になるものを「有効推定量」という。

1 つの母数 θ に対して，その不偏推定量は無数にあるが，一般に，母平均の推定では標本平均 $\overline{X}$ ，母分散の推定では不偏分散 U^2 が推定量として使用される。

よって，母平均や母分散の不偏推定値を求めよ，という問題に対しては，標本平均 $\bar{x}$ と不偏分散値 u^2 を求めればよい。

■ 例題

母平均 μ，母分散 σ^2 の母集団から大きさ 4 の標本を無作為抽出して，標本値

-4，1，2，-1

を得た。このとき，

(1) 母平均 μ を点推定せよ。（μ の不偏推定値を求める）

(2) 母分散 σ^2 を点推定せよ。（σ^2 の不偏推定値を求める）

＜解＞

まず，-4，1，2，-1 の標本平均 $\bar{x}$ と標本分散 s^2 を求める。

(1) 標本平均は

$$\bar{x} = \frac{1}{4}(-4+1+2-1) = -\frac{1}{2} = -0.5$$

従って，母平均 μ の不偏推定値は -0.5（答）

(2) 標本分散は，分散の公式から

$$s^2 = \frac{1}{4}\left\{(-4)^2 + 1^2 + 2^2 + (-1)^2\right\} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$$

よって，不偏分散は

$$u^2 = \frac{4}{4-1}s^2 = \frac{4}{3} \times \frac{21}{4} = 7$$

従って，母分散 σ^2 の不偏推定値は 7（答）

5. α 点（パーセント点）

統計学では，α 点（パーセント点）という表現がよく使用される。確率 α に対して，α 点は 100α %点ともいう。例えば，$\alpha = 0.05$ の場合は，「0.05 点」は「5%点」ともいう。

● パーセント点の定義

確率変数 X と，$0 < \alpha < 1$ を満たす実数 α に対して，α 点を定義する。

① 実数 x が X の分布の上側 α 点 $\iff$ $P(X \geq x) = \alpha$

② 実数 x が X の分布の下側 α 点 $\iff$ $P(X \leq x) = \alpha$

③ X の確率分布が X の平均 μ に関して対象であるとき，

実数 x が X の分布の両側 α 点 $\iff$ $P(X \geq x) = \alpha/2$

● 標準正規分布の α 点

確率変数 Z が標準正規分布に従うとする。

$0 < \alpha < 1$ を満たす実数 α に対して，上側 α 点を $z(\alpha)$ で表す。すなわち，

$$P(Z \geq z(\alpha)) = \alpha$$

このとき，次が成立する。

① $-z(\alpha)$ は下側 α 点，すなわち， $P(Z \leq -z(\alpha)) = \alpha$

② $z\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ は両側 α 点，すなわち， $P\left(Z \geq z\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right) = P\left(Z \leq -z\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right) = \dfrac{\alpha}{2}$

● 標準正規分布でよく使用するパーセント点

(1) 両側 5%点（上側 2.5%点）は， $z(0.025) = 1.96$

(2) 両側 1%点（上側 0.5%点）は， $z(0.005) = 2.58$

■ 例題

標準正規分布において、次の値を求めよ。

(1) 上側 5%点 $z(0.05)$ の値を求めよ。

(2) 両側 8%点

＜解＞

(1) $Z \sim N(0, 1)$ とすると， $P(Z \geq z) = 0.05$ をみたす $z = z(0.05)$ を求めればよい。

$$P(0 \leq Z \leq z) = 0.5 - 0.05 = 0.45$$

従って，逆分布表（テキスト p.159）から， $z(0.05) = 1.645$ （答）

(2) 上側 4%点 $z(0.04)$ を求めればよい。

$$P(0 \leq Z \leq z(0.04)) = 0.5 - 0.04 = 0.46$$

従って，逆分布表から， $z(0.04) = 1.751$ （答）

6. 区間推定

● 定義（区間推定）

(1) 母集団の未知母数 θ を区間で推定することを，区間推定という。

(2) 区間推定では，適切な統計量 $T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の 2 つの実現値 t_1 と t_2 と，確率 α に対して，未知母数 θ が関係式

$$P(t_1 \leq \theta \leq t_2) = 1 - \alpha$$

をみたすとき，次のように表現する。

① 閉区間 $[t_1, t_2]$ を， θ の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間

② $100(1-\alpha)\%$を，区間 $[t_1, t_2]$ の信頼度（または信頼係数）

③ 端点の t_1 と t_2 を，信頼限界

④ $t_2 - t_1$ を，信頼区間の幅

(3) 未知母数 θ を信頼度 95%で推定せよとは，θ の 95%信頼区間を求めることである。

（注意）

信頼度には 95%や 99%がよく用いられる。

$\alpha = 0.05$ の場合，$100(1-\alpha)\% = 95\%$

$\alpha = 0.01$ の場合，$100(1-\alpha)\% = 99\%$

(1) 上記は，以下の例題等で理解すればよい。通常は，確率 $1-\alpha$ を信頼係数（信頼度）という。$\alpha = 0.05$ のときは，信頼係数は $1-\alpha = 0.95$ だが，分かりやすいように 100 倍して，「信頼度は 95%である」と表現する。

(2) 区間推定の問題の答え方は，以下のようにいろいろあるが，どれでもよい。

例えば，身長の母平均 μ を信頼度 95%で推定せよ，という問いに対しては，

母平均 μ の信頼度 95%の信頼区間（母平均 μ の 95%信頼区間）は

①（答）$170 \leq \mu \leq 180$ （不等式で答える）

②（答）$[170, 180]$ （閉区間で答える）

③（答）$(170, 180)$ （開区間で答える）

④（答）170cm 以上 180cm 以下

7. 母平均の区間推定（母分散が既知の場合）

● 定理（母平均の推定－母分散 σ^2 が既知の場合）

母平均 μ，母分散 σ^2 の母集団から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を $\bar{x}$ とする。ここで，次の 2 つを仮定する。

① σ^2 は既知

② 正規母集団，または，大標本（$n \geq 30$）

このとき，母平均 μ の $100(1-\alpha)\%$信頼区間は

$$\bar{x} - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

（注意）

特に，$\alpha = 0.05, 0.01$ の場合

① 母平均 μ の 95%信頼区間

$$\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

② 母平均 μ の 99%信頼区間

$$\bar{x} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(1)（証明）

仮定の②より，大きさ n の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布に従うので，

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{従って，} Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

標準正規分布の両側 α 点を $k_\alpha = z(\alpha/2)$ とすると，

$$P(-k_\alpha \le Z \le k_\alpha) = 1 - \alpha$$

ここで，不等式 $-k_\alpha \le Z \le k_\alpha$ を $\bar{X}$ で表すと，$-k_\alpha \le \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le k_\alpha$

この不等式を変形すると，

$$\bar{X} - k_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + k_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

従って，

$$P\left(\bar{X} - k_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + k_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

この等式は，$\bar{X}$ の実現値 $\bar{x}$ に対して，不等式

$$\bar{x} - k_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + k_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

が正しい確率が $1 - \alpha$ であることを意味する。

従って，母平均 μ の $100(1 - \alpha)$%信頼区間は

$$\bar{x} - z(\alpha/2)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z(\alpha/2)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(2) 区間推定では，信頼区間の幅はできるだけ小さい方がよい。上記の証明において，両側 α 点 k_α で区間 $-k_\alpha \le Z \le k_\alpha$ を考えたが，

$$P(t_1 \le Z \le t_2) = 1 - \alpha$$

を満たす区間 $t_1 \le Z \le t_2$ は無数にある。しかし，区間の幅 $t_2 - t_1$ が最小になる区間が $-k_\alpha \le Z \le k_\alpha$ になる。これは直感的に理解できるだろう。

■ 例題１（母分散が既知で，大標本）

A 県の 17 歳男子の中から 100 人を無作為に選んだところ, 身長の平均が 168.0cm であった。母標準偏差を 6.5cm として，この県の 17 歳男子全体の平均身長 μ を，信頼度 95%で推定せよ。信頼限界は小数第 1 位まで求めること。

＜解答＞

大標本で，母分散 σ^2 は既知である。

標本のサイズは $n = 100$，母標準偏差は $\sigma = 6.5$，標本平均は $\bar{x} = 168.0$ であるから，母平均 μ の 95%信頼区間の信頼限界は

$$\bar{x} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 168.0 \pm 1.96 \times \frac{6.5}{\sqrt{100}} = 168.0 \pm 1.274 = 166.726\,,\ \ 169.274$$

よって，母平均 μ の 95%信頼区間は,

$$166.7 \le \mu \le 169.3 \text{（答）}$$

＜解説＞

この例で，区間推定の意味を詳しく説明しよう。解答としては，上記のように信頼限界を計算すれば，それで終わりである。

A 県の 17 歳男子全体が母集団であり，この県の 17 歳男子全体の平均身長 μ が，母平均である。また，母標準偏差は $\sigma = 0.65$，標本のサイズは $n = 100$ である。

$n \ge 30$ であるから，大標本である。よって，中心極限定理により，大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布をなすと考えてよい。

信頼度は 95%であるから，$100(1-\alpha) = 95$ より，$\alpha = 0.05$ であり，標準正規分布における両側 5%点（上側 2.5%点）は 1.96 である。従って，次が成り立つ。

$$P\left(\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

ここで，母標準偏差 σ が既知なので，次の値が具体的に決まることに注目しよう。

$$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{6.5}{\sqrt{100}} = 1.274$$

よって，

$$P(\bar{X} - 1.274 \le \mu \le \bar{X} - 1.274) = 0.95 \cdots\cdots \quad ①$$

左辺の $\bar{X}$ に，観測した実現値 168.0cm を代入すると，母平均 μ の信頼度 95%の信頼区間

$$168 - 1.274 \le \mu \le 168 + 1.274$$

が得られる。信頼限界を小数第 1 位まで求めると，信頼区間は

$$166.7 \le \mu \le 169.3 \text{（答）}\cdots\cdots \quad ②$$

さて，結論の②で何が分かるのだろうか。次のような解釈は誤りである。

（誤り）母平均μは，166.7～169.3 の間にある。

（誤り）母平均μが 166.7～169.3 の間に入る確率は 0.95 である。

ここで，不等式が成り立つことを「真」，成り立たないことを「偽」と表現すれば，正しい解釈は次のとおりである。どちらでもよい。

（正解）$166.7 \leq \mu \leq 169.3$ が真である確率は 0.95（95%）である。

（正解）$166.7 \leq \mu \leq 169.3$ が偽である確率は 0.05（5%）である。

母平均μは未知であるが，あくまでも定数である。一方，信頼限界の 166.7 や 169.3 は，標本によって変動する。

例えば，$\overline{X}$ の実現値が全部で 100 個あるとし，$\overline{x_1}$，$\overline{x_2}$，…，$\overline{x_{100}}$ を$\overline{X}$ の実現値とすると，これらを①の左辺の不等式に代入すれば，次の 100 個の信頼区間の不等式が得られ，信頼限界もいろいろである。

$$
(※)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\overline{x_1} - 1.274 \leq \mu \leq \overline{x_1} + 1.274 \\
\overline{x_2} - 1.274 \leq \mu \leq \overline{x_2} + 1.274 \\
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overline{x_{100}} - 1.274 \leq \mu \leq \overline{x_{100}} + 1.274
\end{array}
\right.
$$

等式①の意味は，これら 100 個のうちの 95 個（95%）の不等式は真であり，残りの 5 個（5%）の不等式は偽ということである。そして，区間推定とは，このような 100 個の不等式のうちの 1 つ（②）を，我々が観測するということである。

②が真か偽のどちらであるかは，分からない。分かることは，観測した②が，95%は真であり 5%は偽であるという不等式の集まり（※）から無策に選ばれた 1 つということである。従って，②が真である確率は 0.95，同じことだが，②が偽である確率は 0.05 ということになる。これが正しい解釈である。

では，最終的に②をどのように判断すべきだろうか。例えば，標本抽出を 100 回行い，得られた信頼区間を毎回真と判断したとしよう。現実に 100 回行うことは不可能であるが，このように考えてみる。

この場合，その判断が正しい回数が 100 回中およそ 95 回，判断が誤る回数がおよそ 5 回ということになる。100 回のうち 95 回は正しい判断になるのである。そうであれば，判断が誤りとなる 5 回（5%）のリスク（危険性）に目をつむって，得られた信頼区間は真と判断するのが妥当な考え方ではないだろうか。要するに，「判断が誤っている確率が 5%であることは知っていますが，一応，この信頼区間は真であると判断します」という結論になる。これはまさに「得られた不等式の信頼性は 95%である」という表現になる。

信頼度 95%の推定の本質は，95%は正しく 5%は誤りである不等式の集まり（※）を作ることができるという点である。

■ 例題２（母分散が既知で，正規母集団）

ある工場で大量生産されている電球の中から 25 個を無作為抽出して調べたところ，それらの平均寿命時間は 1415 時間であった。この製品の寿命時間は，標準偏差が 110 時間の正規分布に従っているものとして，次の問いに答えよ。

(1)　製品全体の平均寿命を信頼度 95%で推定せよ。(信頼限界は小数第 1 位まで求めること)

(2)　(1)において，信頼区間の幅を 20 時間以内にするには，少なくとも何個の電球を調べる必要があるか。

＜解答＞

※ 通常の区間推定の問題はワンパターンであり，(1)では信頼限界を計算するだけである。ただし，母分散が既知なのか未知なのかに注意する必要がある。

(1)　（正規母集団であるから，標本のサイズに関係なく，$\overline{X}$ は正規分布をなす。）

母平均（製品全体の平均寿命）を μ とする。正規母集団であり，母分散は $\sigma^2 = 110^2$ で既知である。標本のサイズは $n = 25$ で，標本平均は $\bar{x} = 1415$ であるから，95%信頼区間の信頼限界は

$$\bar{x} \pm 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1415 \pm 1.96 \times \frac{110}{\sqrt{25}} = 1415 \pm 43.12 = 1371.88,\ 1458.12$$

よって，母平均 μ の 95%信頼区間は，$1371.9 \le \mu \le 1458.1$（答）

(2)　標本平均 $\bar{x}$ に対して，母平均 μ の 95%信頼区間は，

$$\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

よって，信頼区間の幅は

$$2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \times 1.96 \times \frac{110}{\sqrt{n}} = \frac{431.2}{\sqrt{n}}$$

ここで，$\dfrac{431.2}{\sqrt{n}} \le 20$ とすると，$431.2 \le 20 \times \sqrt{n}$ より，$\sqrt{n} \ge \dfrac{431.2}{20}$

両辺を 2 乗して，$n \ge \left(\dfrac{431.2}{20}\right)^2 = \dfrac{(431.2)^2}{400} = 464.8\cdots$

n は整数値であるから，$n \ge 465$　　　（答）465 個

＜解説＞

信頼度 95%を高くして 99%にすると，99%の信頼区間は

$$\bar{x} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

この信頼限界は

$$\bar{x} \pm 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1415 \pm 2.58 \times \frac{110}{\sqrt{25}} = 1415 \pm 56.76 = 1358.24,\ 1471.76$$

よって，母平均 μ の 99%信頼区間は

$$1358.2 \leq \mu \leq 1471.8$$

一般に，信頼度を高くすると信頼区間は広くなり，信頼度を低くすると信頼区間は狭くなることに注意しよう。通常，信頼度は 90%，95%，99% などにするが，100%にはしない。信頼度 100%の信頼区間は $-\infty < \mu < +\infty$ になるが，これは単に μ が実数であることを示しているにすぎず，この信頼区間からは何の情報も得られない。

(2)においては，95%の場合の信頼区間の幅は $2 \times 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ であり，標本のサイズ n を大きくすればするほど，その幅は小さくなる。

一般に，信頼度を固定した場合，標本のサイズ n が大きいほど信頼区間は狭くなり，逆に，標本のサイズ n が小さいほど信頼区間は広くなる。

信頼区間は狭いほうが良いが，むやみに標本のサイズ n を大きくすることもできない。(2)では，信頼区間の幅を 20 時間以内にするための，最低限の電球の個数を求めている。

なお，

$$\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

を変形すると，

$$|\bar{x} - \mu| \leq 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

となる。この不等式は，我々が観測した標本平均 $\bar{x}$ を母平均と見なした場合，真の母平均との誤差（最大誤差）が，$1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ であることを示している。

例えば，(1)の信頼区間 $1415 - 43.12 \leq \mu \leq 1415 + 43.12$ を変形すると，

$$-43.12 \leq 1415 - \mu \leq 43.12$$

分かるだろうか。標本平均 1415 を母平均と見なしたとする。つまり，抽出した 25 個の電球の平均寿命時間（1415 時間）が母平均であると考えたとする。あるいは，標本平均 1415 で母平均を点推定したと考えてもよい。

当然，1415 時間は真の母平均と異なるが，1415 時間と真の母平均 μ との誤差が 43.12 時間であることが分かる。もちろん，これも信頼度が 95%での話である。

■ **例題３（母分散が既知で，大標本）**

無作為に 3 歳児 65 人を選んで体重を測定したところ，平均は 14.0kg であった。3 歳児全体の体重の標準偏差は 2.5kg であることが知られている。3 歳児全体の平均体重 μ を信頼度 99%で推定するとき，次の問いに答えよ。

(1)　母平均 μ の 99%信頼区間を求めよ。（信頼限界は小数第 1 位まで求めること。）

(2)　標本平均 14.0kg を母平均と見なしたとき，真の母平均 μ との誤差（最大誤差）はいくらか。（小数第 1 位まで求めること。）

(3)　信頼区間の幅を 1.0kg 以内にするためには，標本の対象となる 3 歳児を何人以上選べばよいか。

＜解答＞

(1)　標本のサイズは $n = 65$，標本平均は $\bar{x} = 14.0$，母標準偏差は $\sigma = 2.5$ である。

大標本で母分散は既知であるから，信頼限界は

$$\bar{x} \pm 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 14 \pm 2.58 \times \frac{2.5}{\sqrt{65}} = 14 \pm 0.800 = 13.2,\ 14.8$$

従って，母平均 μ の 95%信頼区間は

$$13.2 \leq \mu \leq 14.8$$ （答）

(2)　求める誤差は

$$2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.58 \times \frac{2.5}{\sqrt{65}} = 0.800$$ （答） 0.8 kg

(3)　信頼区間の幅は，

$$2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \times 2.58 \times \frac{2.5}{\sqrt{n}} = \frac{12.9}{\sqrt{n}}$$

ここで，

$\dfrac{12.9}{\sqrt{n}} \leq 1.0$　とすると，$\sqrt{n} \geq 12.9$　　$\therefore$　$n \geq (12.9)^2 = 166.41$

n は整数であるので，$n \geq 167$ である。　（答）167 人以上

8. χ^2 分布

● **定義**

n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立で,

$$X_i \sim N(0, 1) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

であるとき，これらの 2 乗の和

$$X = X_1{}^2 + X_2{}^2 + \cdots + X_n{}^2$$

の確率分布を，自由度 n の χ^2 分布（カイ 2 乗分布）といい，$\chi_n{}^2$ で表す。

一般に，確率変数 X の確率分布が自由度 n の χ^2 分布になるとき，X は $\chi_n{}^2$ に従うといい，$X \sim \chi_n{}^2$ で表す。

（注意）

$X \sim \chi_n{}^2$ のとき，$\chi_n{}^2$ の上側 α 点を $\chi_n{}^2(\alpha)$ で表す。すなわち,

$$P(X \geq \chi_n{}^2(\alpha)) = \alpha$$

(1) 確率分布は，その確率密度関数（離散型の場合は確率関数）によって定義される。しかし，通常は，その密度関数は繁雑なので覚える必要はない。χ^2 分布（chi-square distribution）も同様である。χ^2 分布は，母分散の区間推定などに利用される有名な確率分布である。

(2) $X \sim \chi_n{}^2$ のとき，X の確率密度関数 $f(x)$ の値は，Excel の CHISQ.DIST 関数で求めることができる。

$$f(x) = \text{CHISQ.DIST}(x, \text{自由度}, \text{FALSE})$$

(3) χ^2 分布の上側 α 点は，テキストの χ^2 分布表（p.160）で示されている。

(4) $X \sim \chi_n{}^2$ のとき，常に $X \geq 0$ である。従って，$P(X \leq 0) = 0$ なので，例えば

$$P(-1.5 \leq X \leq 2) = P(0 \leq X \leq 2)$$

■ 例題 1

χ^2 分布表（p.160）を用いると,

(1) $\chi_{10}{}^2(0.95) = 3.940$ (2) $\chi_7{}^2(0.025) = 16.01$

(3) $\chi_{18}{}^2(0.99) = 7.015$

■ 例題 2

X が自由度 15 の χ^2 分布に従うとき，次の確率を求めよ。

(1) $P(X < 6.262)$ (2) $P(5.229 < X < 22.31)$

＜解＞

(1) $6.262 = \chi_{15}{}^2(0.975)$ であるから,

$$P(X < 6.262) = 1 - 0.975 = 0.025$$ （答）

(2)　$5.229 = \chi_{15}{}^2(0.990)$，$22.31 = \chi_{15}{}^2(0.100)$ であるから，

$$P(5.229 < X < 22.31) = 0.990 - 0.100 = 0.890$$ （答）

● **定理**

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の標本変量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ について, 以下が成り立つ。

(1)　統計量

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

は，自由度 n の χ^2 分布に従う。

(2)　統計量

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)U^2}{\sigma^2}$$

は，自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う。S^2 は標本分散，U^2 は普遍分散である。

(1)　上記の(1)の確認は容易である。実際，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ であるから，X_i を標準化すると

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

また，$Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ は独立になるので，

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = Z_1{}^2 + Z_1{}^2 + \cdots + Z_n{}^2$$

は，自由度 n の χ^2 分布に従う。

(2)　上記(2)は有名な定理であるが，証明は繁雑なので，そのまま認めればよい。自由度とは，独立に自由に動くことができる変数の個数のことであり，(1)では，

$$X_i - \mu \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

は自由に動くことができるので，自由度が n になる。しかし，(2)では

$$(X_1 - \overline{X}) + (X_2 - \overline{X}) + \cdots + (X_n - \overline{X}) = 0$$

という関係がある。そのため，独立な項は

$$X_i - \overline{X} \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

の$n-1$個になり，自由度が$n-1$になる。

9. t 分布

● **定義**

$X \sim {\chi_n}^2$， $Z \sim N(0,1)$で， X，Z が独立のとき，

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n}}}$$

の確率分布を，自由度nのt分布といい， $t(n)$で表す。また， $T \sim t(n)$で表す。

（注意）

(1) t分布$t(n)$のグラフは，正規分布と同様に，直線$t=0$に関して対称になる。

(2) 自由度nを大きくしていけば, $t(n)$は標準正規分布$N(0,1)$に限りなく近づいていく。

(3) $T \sim t(n)$のとき，t分布の両側α 点を$t_n(\alpha)$で表す。すなわち,

$$P(|T| \geq k) = P(T \leq -k \text{ または } T \geq k) = \alpha$$

をみたす実数kを$t_n(\alpha)$で表す。

(1) t分布（t-distribution）は，ステューデントのt分布ともいう。

(2) $X \sim t(n)$のとき， X の確率密度関数 $f(x)$の値は，Excel の T.DIST 関数で求めることができる。

$f(x) =$ T.DIST（x，自由度, FALSE)

(3) 一方， $X \sim N(\mu, \sigma^2)$のとき， X の確率密度関数 $f(x)$の値は，Excel の NORM.DIST 関数で調べることができる。

$f(x) =$ NORM.DIST（x，平均，標準偏差, FALSE)

(4) 自由度nが 30 以上のときは， $t(n)$は$N(0,1)$で近似できる。

(5) 自由度nのt分布の両側α 点 $t_n(\alpha)$ は，テキストのt分布表（p.161）で示されている。

■ 例題１

t分布表（p.161）を用いると，

(1) $t_{10}(0.1) = 1.812$　　(2) $t_{13}(0.01) = 3.012$

(3) $t_{19}(0.02) = 2.539$

■ 例題２

T が自由度 6 の t 分布に従うとき，次の確率を求めよ。

(1) $P(|T| \geq 2.447)$

(2) $P(T > -3.143)$

(3) $P(-2.447 < T < 3.707)$

＜解＞

(1) t 分布表より，$2.447 = t_6(0.05)$ であるから，$P(|T| \geq 2.447) = 0.05$ （答）

(2) t 分布表より，$3.143 = t_6(0.02)$ であるから，

$$P(T > -3.143) = 1 - 0.01 = 0.99$$ （答）

(2) t 分布表より，$2.447 = t_6(0.05)$，$3.707 = t_6(0.01)$ であるから，

$$P(-2.447 < T < 3.707) = 1 - \frac{0.05 + 0.01}{2} = 0.97$$ （答）

10. 母平均の区間推定（母分散が未知の場合）

● **定理**

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の標本変量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ について，

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{U}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n - 1}}}$$

は，自由度 $n - 1$ の t 分布に従う。ここで，U は不偏標準偏差，S は標本標準偏差である。

（注意）

上記の分母は等しい。すなわち，

$$\frac{U}{\sqrt{n}} = \frac{S}{\sqrt{n - 1}}$$

(1) 前の定理・定義を使えば，上記の成立は確認できる。正規母集団であるから，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

一方，p.104 の定理から

$$X = \frac{(n - 1) U^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}{}^2$$

X と Z が独立であることを認めれば，p.105 の定義から，

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\dfrac{X}{n-1}}} \sim t(n-1) \quad （自由度 n-1 の t 分布）$$

ここで，

$$\sqrt{\frac{X}{n-1}} = \sqrt{\frac{U^2}{\sigma^2}} = \frac{U}{\sigma}$$

従って，

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \times \frac{1}{\dfrac{U}{\sigma}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{U}{\sqrt{n}}}$$

(2)　母分散σ^2が未知であっても，Tを母平均μの区間推定に使うことができる。

● 定理（母平均の t 推定－母分散σ^2が未知で，正規母集団の場合）

（母分散σ^2が未知の）正規母集団$N(\mu, \sigma^2)$から無作為抽出した大きさnの標本の，標本平均を$\bar{x}$，不偏分散をu^2とするとき，母平均μの$100(1-\alpha)\%$信頼区間は

① $$\bar{x} - t_{n-1}(\alpha)\frac{u}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{n-1}(\alpha)\frac{u}{\sqrt{n}}$$

② $$\bar{x} - t_{n-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{n-1}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{n-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

（注意）

s^2は標本分散，sは標本標準偏差である。①と②の不等式は，同じである。②のように書いている解説書も多数ある。

(1)　t分布による区間推定を「t推定」という。正規母集団であることはわかっているが，母分散σ^2の値が未知のときは，母平均μの推定はt推定で行う。

(2)　前の定理より，統計量

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{U}{\sqrt{n}}}$$

は，自由度$n-1$のt分布に従うので，$0 < \alpha < 1$を満たす実数αに対して，自由度$n-1$のt分布の両側α点$t_{n-1}(\alpha)$を考えれば，

$$P(|T| \leq t_{n-1}(\alpha)) = P(-t_{n-1}(\alpha) \leq T \leq t_{n-1}(\alpha)) = 1-\alpha$$

ここで，不等式

$$-t_{n-1}(\alpha) \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{U}{\sqrt{n}}} \leq t_{n-1}(\alpha)$$

を変形すると，

$$\overline{X} - t_{n-1}(\alpha)\frac{U}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{n-1}(\alpha)\frac{U}{\sqrt{n}}$$

この不等式に，抽出した標本の標本平均 $\bar{x}$，不偏標準偏差 u を代入すれば，次が得られる。

$$\bar{x} - t_{n-1}(\alpha)\frac{u}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{n-1}(\alpha)\frac{u}{\sqrt{n}}$$

この不等式が真である確率が $1 - \alpha$ になる。

■ 例題１（母分散が未知で，正規母集団で）（テキスト p. 109）

ある健康食品から 10 個の標本を無作為抽出し，含まれるビタミン C の含有量を調べたところ，その平均は $\bar{x} = 30.3$（mg）で，不偏分散は $u^2 = 1.7^2$ であった。

この健康食品のビタミン C の平均含有量 μ の 95%信頼区間を求めよ。ただし，ビタミン C の含有量は正規分布に従うとし，信頼限界は小数第 1 位まで求めよ。

＜解答＞

正規母集団だが，母分散 σ^2 は未知であるので，t 推定を行う。

母平均 μ の信頼度 $1 - \alpha$ の信頼区間は

$$\bar{x} - t_{n-1}(\alpha)\frac{u}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{n-1}(\alpha)\frac{u}{\sqrt{n}}$$

標本のサイズは $n = 10$，不偏標準偏差は $u = 1.7$ である。また，t 分布表（p.161）より，自由度 9 の t 分布の両側 5%点は

$$t_9(0.05) = 2.262$$

母平均 μ の 95%信頼区間の信頼限界は，

$$\bar{x} \pm t_{n-1}(\alpha)\frac{u}{\sqrt{n}} = 30.3 \pm 2.262 \times \frac{1.7}{\sqrt{10}} = 29.083\cdots,\ 31.516\cdots$$

よって，母平均 μ の 95%信頼区間は，

$$29.1 \leq \mu \leq 31.5 \text{（答）}$$

■ **例題２（母分散が未知で，正規母集団）**

ある正規母集団から大きさ 15 の標本を無作為抽出したところ，標本平均が $\bar{x} = 122$，標本分散が $s^2 = 49.6$ であった。このとき，母平均 μ を信頼度 99%で推定せよ。信頼限界は，小数第 2 位まで求めること。

＜解答＞

正規母集団だが，母分散 σ^2 の値がわからないので，t 推定を行う。

母平均 μ の信頼度 $1 - \alpha$ の信頼区間は

$$\bar{x} - t_{n-1}(\alpha)\frac{u}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{n-1}(\alpha)\frac{u}{\sqrt{n}}$$

標本のサイズは $n = 15$ で，自由度 14 の t 分布の両側 1%点は $t_{14}(0.01) = 2.977$

また，不偏分散 u^2 について，

$$\frac{u^2}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{s^2}{n-1} = \frac{49.6}{15-1} = \frac{49.6}{14} = \frac{24.8}{7}$$

$$\therefore \frac{u}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{24.8}{7}}$$

母平均 μ の 95%信頼区間の信頼限界は，

$$\bar{x} \pm t_{n-1}(\alpha)\frac{u}{\sqrt{n}} = 122 \pm 2.977 \times \sqrt{\frac{24.8}{7}} = 116.3965\cdots,\ 127.6034\cdots$$

よって，母平均 μ の 99%信頼区間は，

$$116.40 \le \mu \le 127.60$$ （答）

● **定理（母平均の推定－母分散 σ^2 が未知で，大標本の場合）**

（母分散 σ^2 が未知の）母集団から無作為抽出した大きさ n の標本が大標本の場合，標本平均を $\bar{x}$，不偏分散を u^2 とするとき，母平均 μ の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間は

$$\bar{x} - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{u}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{u}{\sqrt{n}}$$

（注意）

特に，$\alpha = 0.05,\ 0.01$ の場合

① 母平均 μ の 95%信頼区間

$$\bar{x} - 1.96\frac{u}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + 1.96\frac{u}{\sqrt{n}}$$

② 母平均 μ の 99%信頼区間

$$\bar{x} - 2.58\frac{u}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + 2.58\frac{u}{\sqrt{n}}$$

(1)　上記定理において，もし正規母集団であることがわかっていれば，標本のサイズにかかわりなく，t 推定を行えばよい。

(2)　しかし，正規母集団であるかどうか不明の場合は，大標本という情報を使うしかない。大標本であれば，中心極限定理により，$\overline{X}$ は正規分布に従う。よって，母分散 σ^2 が既知の場合と同様に，

$$\bar{x} - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

という，信頼区間を定める不等式が得られる。しかし，σ^2 が未知なので，信頼区間が定まらない。

この場合は，σ の代わりに，標本の不偏標準偏差 u を使う。不偏分散 U^2 は，母分散 σ^2 の不偏推定量であった。さらに，証明は略すが，標本のサイズ n を大きくしていくと，U^2 の実現値は σ^2 に近づいていくことが知られている。従って，大標本のときは，σ^2 を U^2 の実現値 u^2 で近似できる。

高校数学 B では，σ の代わりに，u ではなく標本の標準偏差 s を使っているが，これでも構わない。標本のサイズ n を大きくすると，標本分散 S^2 の実現値も σ^2 に近づくからである。

しかし，S^2 ではなく U^2 が母分散 σ^2 の不偏推定量であることを考えれば，s よりも u を使用した方がよい。

■ 例題３（母分散が未知で，大標本）

無作為に 3 歳児 65 人を選んで体重を測定したところ，平均は 14.0kg で，標準偏差は 2.0kg であった。このとき，3 歳児全体の平均体重を信頼度 95%で推定せよ。（信頼限界は小数第 1 位まで求めること。）

＜解答＞

※ 母分散が未知なので，不偏標準偏差 u を求める。

標本のサイズは $n = 65$ であり，標本平均は $\bar{x} = 14.0$，標本標準偏差は $s = 2.0$ である。

標本の不偏標準偏差を u とすると，

$$\frac{u^2}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{s^2}{n-1} = \frac{2^2}{65-1} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

$$\therefore \quad \frac{u}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

大標本で母分散は未知であるから，信頼限界は

$$\bar{x} \pm 1.96 \times \frac{u}{\sqrt{n}} = 14 \pm 1.96 \times \frac{1}{4} = 14 \pm 0.49 = 13.51,\ 14.49$$

従って，母平均μの 95%信頼区間は

$$13.5 \le \mu \le 14.5 \text{（答）}$$

11. 母平均の区間推定のまとめ

母平均の区間推定は，以下の順序で考えればよい。小標本とは，大標本でない標本（標本のサイズが 30 未満の標本）のことである。

● 母平均μの$100(1-\alpha)$%信頼区間（まとめ）

(1) 母分散σ^2が既知の場合

① 正規母集団または大標本

$$\bar{x} - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(2) 母分散σ^2が未知の場合

① 大標本

$$\bar{x} - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{u}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{u}{\sqrt{n}}$$

② 正規母集団で小標本

$$\bar{x} - t_{n-1}(\alpha)\frac{u}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{n-1}(\alpha)\frac{u}{\sqrt{n}}$$

(1)において，正規母集団でも大標本でもない場合は，標本平均$\bar{X}$の確率分布は確定できないので，母分散が既知であっても，区間推定は困難になる。

(2)において，正規母集団の場合は，標本のサイズにかかわりなく，信頼度$1-\alpha$の信頼区間は②の不等式になる。ただし，大標本という条件が加わると，①と②はほとんど同じ不等式になる。また，t分布表では，$n \le 100$と$n = \infty$の場合と値しか掲載されていない。その意味で，①を使用してよい。

従って，(2)においては，正規母集団で大標本の場合も，①を使用する。正規母集団で小標本の場合のみ，②を使用することになる。

12. 母比率の区間推定

● **定理（母比率の推定）**

母集団に対して，性質 E を持つ個体の母比率を p とする。この母集団から，大きさ n（≥ 100）の標本を無作為抽出し，標本比率 $\hat{P}$ の実現値を $\hat{p}$ とする。

このとき，母比率 p の $100(1-\alpha)$ %信頼区間は

$$\hat{p} - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

（注意）

特に，$\alpha = 0.05$，0.01 の場合

① 母比率 p の 95%信頼区間

$$\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

② 母平均 p の 99%信頼区間

$$\hat{p} - 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

(1) 上記は，プリント p.85 の定理より自明である。実際

$$E(\hat{P}) = p, \quad V(\hat{P}) = \frac{pq}{n} \quad (q = 1 - p)$$

であり，標本のサイズ n を大きくしていけば，$\hat{P}$ の分布は正規分布に近づいていく。

特に，$n \geq 100$ のときは,

$$\hat{P} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

と見なしてよい。このとき,

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$

従って，$0 < \alpha < 1$ を満たす実数 α に対して

$$P\left(-z\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq Z \leq z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \alpha$$

ここで，不等式

$$-z\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\dfrac{p\,q}{n}}} \leq z\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

を変形すると，

$$\hat{P} - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{pq}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

この不等式の $\hat{P}$ に，抽出した標本の標本比率 $\hat{p}$ を代入して，$q = 1 - p$ にすれば，

（※）$$\hat{p} - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}}$$

この不等式が真である確率が $1 - \alpha$ になる。しかし，信頼限界に母比率 p が含まれ，これでは信頼区間が定まらない。

しかし，n を大きくすると，標本比率 $\hat{P}$ の実現値 $\hat{p}$ は，母比率 p に近づくので，上式の $p(1 - p)$ を $\hat{p}(1 - \hat{p})$ に置き換えてよい。すなわち，

$$\hat{p} - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

これを，母比率 p の信頼度 $1 - \alpha$ の信頼区間と考える。（ただし，これは少し粗い推定になる。）

⑵　個体に関する性質（特性）E を決めれば，母集団 Ω は，E をもつ個体の集団と，E をもたない個体の集団の 2 つの集団に分かれる。一般に，ある性質 E によって 2 つの集団に分かれているような母集団を「二項母集団」という。

いま，性質 E をもつ個体の集合を A とし，個体 ω の特性値 Y を次のように定める。

$$Y = \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \notin A) \end{cases}$$

Y を確立変数と見なせば，$P(Y = 1) = P(A) = p$ であり，Y の確率分布（母集団分布）は，右のようになる。

Y	1	0	計
P	p	q	1

次に，大きさ n の標本変量（$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$）と標本平均

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)$$

を考えれば，結局は，$\hat{P} = \overline{Y}$ になる。

つまり，標本比率 $\hat{P}$ は，上記のように特性値を決めれば，標本平均 $\overline{Y}$ になる。従って，大数の法則より，標本のサイズ n を大きくしていけば，$\hat{P}$ の実現値 $\hat{p}$ は，母比率 p に近づいていくのである。

⑶　上記の定理では，$n \geq 100$ を条件にしているが，これは厳密な基準ではない。p の値が

1/2 に近ければ，$n \geq 30$ でもよい。逆に， p の値が非常に小さい，あるいは，非常に大きい場合は，標本のサイズを大きくしないと，正確な信頼区間は得られない。

■ **例題**

A 地域で，無作為抽出した児童 1600 人のツベルクリン反応を調べたところ，320 人が陰性であった。

(1) A 地域の児童のツベルクリン反応の陰性率 p を，信頼度 95%で推定せよ

(2) A 地域の児童全体が 8000 人の場合，ツベルクリン反応が陰性の児童は何人ぐらいいると推定されるか，95%の信頼度で推定せよ。

＜解答＞

(1) 標本比率は $\hat{p} = \dfrac{320}{1600} = 0.2$， $1 - \hat{p} = 0.8$

従って，信頼限界は

$$\hat{p} \pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.2 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{1600}} = 0.1804,\ 0.2196$$

よって，陰性率 p の 95%信頼区間は，

$$0.1804 \leq p \leq 0.2196 \quad （答）$$

(2) N 人と推定すると， $8000 \times 0.1804 = 1443.2$， $8000 \times 0.2196 = 1756.8$ より，

$$1443.2 \leq N \leq 1756.8$$

よって，陰性の児童数 N の 95%信頼区間は，

$$1444 \leq N \leq 1756 \quad （答）$$

（注意）

(2)においては，「信頼度 95%で 1444 人以上 1756 人以下と推定される」と解答してもよい。また，信頼区間は，次のように答えてもよい。

○ 小数第 1 位を四捨五入 $\Longrightarrow$ $1443 \leq N \leq 1757$

○ 小数第 1 位を切り捨て $\Longrightarrow$ $1443 \leq N \leq 1756$

13.　母比率の区間推定での標本のサイズ

● **定理（標本のサイズの決定）**

母集団に対して，性質 E を持つ個体の母比率を p とする。このとき，標本のサイズ n が十分大きい標本に対して，母比率 p の $100(1-\alpha)$ %信頼区間の幅が L 以下であるとすると，次の不等式が成り立つ。ここで，$k_\alpha = z\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ は，標準正規分布の両側 α 点である。

（※）　$n \geq 4p(1-p)\left(\dfrac{k_\alpha}{L}\right)^2$

信頼区間の幅を L 以下にするには，以下の流れで標本のサイズ n を決定してよい。

(1)　事前情報がある場合
　母比率 p に関する事前情報があるときは，（※）の p をそれに置き換える。

(2)　事前情報がない場合
　母比率 p に関する事前情報がないときは，次の不等式で n を決定する。

$$n \geq \left(\frac{k_\alpha}{L}\right)^2$$

（注意）$p(1-p)$（$0 < p < 1$）の最大値は $1/4$ である。

$$p(1-p) = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

(1)　アンケート調査などの実際の調査では，抽出した標本から母比率 p の信頼区間が求まり，その信頼区間の幅が決まる。

(2)　しかし，調査計画を立てるとき，信頼区間の幅が例えば 0.01 以下にしなければ調査の意味がないという場合もある。そのような場合，調査を実施する前に，抽出する標本のサイズ n を決めておく必要がある。

(3)　標本のサイズ n が十分大きいと仮定すれば，$\hat{P}$ の実現値 $\hat{p}$ に対して，母比率 p の信頼度 $1-\alpha$ の信頼区間は，本来は次のようになる。（ルート内は $\hat{p}$ ではなく p である。）

$$\hat{p} - k_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{p} + k_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

このとき，

①　信頼区間の幅は　$2k_\alpha\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

② $\hat{p}$ と p との誤差は　$k_{\alpha}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

ここで，信頼区間の幅が L 以下とすると，

$$2k_{\alpha}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq L$$

この不等式を変形すれば，次が得られる。

（※）　$n \geq 4p(1-p)\left(\dfrac{k_{\alpha}}{L}\right)^2$

従って，信頼区間の幅が L 以下にするには，（※）を満たすように n を決めればよい。

ここで，

$$p(1-p) = -(p-1/2)^2 + 1/4$$

であるので，すべての実数 p（$0 < p < 1$）に対して

$$1/4 \geq p(1-p) > 0$$

従って，p に関する情報がないときは，次の不等式を満たすように n を決めればよい。

$$n \geq \left(\frac{k_{\alpha}}{L}\right)^2$$

一方，例えば，実際に標本のサイズが大きいような標本抽出を行い，$\hat{P}$ の実現値 $\hat{p}$ が得られているときは，（※）の p を $\hat{p}$ に置き換えて，次の不等式で n を決めてもよい。

$$n \geq 4\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{k_{\alpha}}{L}\right)^2$$

また，予備調査や過去の調査等により，母比率がおよそ $\overline{p}$ という値をとることが予想されているときは，次の不等式により n を決めてもよい。

$$n \geq 4\overline{p}(1-\overline{p})\left(\frac{k_{\alpha}}{L}\right)^2$$

■ 例題

ある町で，ある意見に賛成かどうかを世論調査する予定である。この意見に対する賛成率を，信頼度 99%で信頼区間の幅が 6%以下になるように推定したい。次のそれぞれの場合において，何人以上抽出して世論調査をすればよいか。

(1)　無作為に 100 人を抽出して世論調査をしたら，そのうち 60 人が賛成をした。

⑵　まだ世論調査を開始していないが，全体の賛成率は60%と予想されている。
⑶　まだ世論調査を開始していないし，全体の賛成率も予想されていない。

＜解答＞

標本のサイズnは十分大きいと仮定し，賛成率（母比率）をp，$k_\alpha = 2.58$，$L = 0.06$とする。

⑴　100人抽出したときの標本比率は $\hat{p} = 60/100 = 0.6$で，$1 - \hat{p} = 0.4$

$p \fallingdotseq 0.6$ を考えて

$$n \geq 4p(1-p)\left(\frac{k_\alpha}{L}\right)^2 = 4 \times 0.6 \times 0.4 \times \left(\frac{2.58}{0.06}\right)^2 = 1775.04$$

（答）1776人以上

⑵　$p \fallingdotseq 0.6$ を考えて

$$n \geq 4p(1-p)\left(\frac{k_\alpha}{L}\right)^2 = 4 \times 0.6 \times 0.4 \times \left(\frac{2.58}{0.06}\right)^2 = 1775.04$$

（答）1776人以上

⑶　母比率pに関する情報はないので，

$$n \geq \left(\frac{k_\alpha}{L}\right)^2 = \left(\frac{2.58}{0.06}\right)^2 = 1849$$

（答）1849人以上

（注意）

この種の問題で $n \geq 20$ などとなった場合は，nは十分大きいとは言えないので，実際の標本抽出では，標本のサイズは30以上にする必要がある。

また，⑴において，10人調査して6人が賛成した場合，標本のサイズは小さいので，これは事前情報にはならない。この場合は，⑶で計算することになる。

12. 統計的仮説検定

1. 仮説検定とは

仮説検定（hypothesis testing）とは，母集団に関する仮説を標本から検証することである。「統計的仮説検定」または単に「検定」ともいう。

仮説検定では，未知母数に関する仮説を立てて，抽出した標本から仮説の正当性を検証する。標本のみから母数の値を正確に求めることは不可能であるが，仮説検定により，母数に関する妥当な評価が可能になる。

2. 仮説検定の考え方

仮説検定の考え方は単純であるが，少し詳しく説明しておこう。

> ● 問題
>
> 1 個のサイコロ S を 4 回投げたところ，4 回とも 1 の目が出た。このサイコロは正常なサイコロなのだろうか？

4 回とも 1 の目が出ることは，非常に珍しい。ひょっとしたら，1 の目が出やすい歪んだサイコロなのかもしれない。もし正常なサイコロであれば，1 の目が出る確率は 1／6 になるはずである。そこで，このサイコロの 1 の目が出る確率を p とし，次の仮説を立ててみる。

① 仮説 H_0 ： $p = 1/6$

この仮説が正しいと仮定すると，次の確率変数 X の確率分布が定まる。

② 「S を 4 回投げる」という試行 T において，1 の目が出る回数を X とすれば，

$X \sim B(4,\ 1/6)$ であり，

$$P(X = k) = {}_4\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{4-k} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

従って，4 回とも 1 の目が出る確率は次のようになる。

③ $$P(X = 4) = {}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{6}\right)^4 = 0.0007716\cdots$$

この確率は，約 0.0008 という非常に小さな値になった。

$$10000 \times 0.0008 = 8$$

であるから，②の試行 T を 1 万回繰り返したとき，「$X = 4$」は，8 回程度しか起こらない現象ということになる。非常に珍しい現象である。ところが，現実の 1 回の試行で「$X = 4$」が起こった。奇跡が起こったと言ってもよいだろう。

しかし，現実世界において，我々はそうそう奇跡とは遭遇しない。1 回の試行で奇跡に出会う可能性は 0%ではないが，普通は，そんな奇跡とは遭遇しないと判断するのが，妥当な思考ではなかろうか。

仮説 H_0 が正しいと仮定したから奇跡になるのであって，正しいと仮定しなければ，奇跡とは言えない。となると，仮説の正当性に疑問が生じ，とても正しいとは認められない仮説になる。

このような場合，仮説 H_0 は誤りであると判定する。この判定を，仮説を棄却（ききゃく）する（捨てる，否定する）という。

では，「$X = 4$」ではなく，「$X = 1$」の場合はどうだろうか。

$$④\quad P(X = 1) = {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{4-1} = 0.3858\cdots$$

この確率は，「非常に小さな値」ではない。つまり，「$X = 1$」は，②の試行 T を 10 回繰り返したとき，3 回～4 回程度起こる現象である。この現象が現実の 1 回の試行で起こったとしても，不思議ではない。このような場合は，仮説 H_0 は誤りであるとは言えず，「仮説を棄却しない」という判定になる。この判定は，仮説を棄却する根拠がないという意味であり，仮説が正しいことを認めるものではない。

一般に，仮説が正しいことを示すためには，さまざまな角度からの検討が必要であり，実際には不可能に近い。これに対して，仮説 H_0 が誤りであることは，標本から検証できる。従って，仮説検定では，正しいと思っている命題を仮説に立てても無意味であって，正しくないと思っている命題を仮説に立てて検定することになる。

サイコロ S は，異常であると思った。そこで，正常であると仮定し，次の仮説を立てた。

仮説 H_0 ： $p = 1/6$

よって，目標は H_0 を捨てることである。仮説は，捨てる目的で立てる。その意味で，仮説 H_0 を「帰無（きむ）仮説」という。

一方，H_0 が棄却されたとき，我々が主張したい仮説を対立仮説とよび，H_1 で表す。対立仮説 H_1 は，帰無仮説 H_0 に代わって選ばれるべき仮説である。

仮説 H_0 が捨てられた場合，「H_0 は誤りである」と強く主張してよい。しかし，捨てられない場合は，「H_0 は正しい」と判断してはいけない。その場合は，「H_0 は誤りであるとは言えない」「H_0 が誤りである根拠が見つからない」という弱い主張しかできない。

なお，以上のように説明はしたが，本来，仮説検定では仮説が正しいかどうかを論じているのではなく，あくまでも仮説が棄却できるかどうかを論じていることに注意する必要がある。

3. 有意水準

仮説を捨てるための基準になる確率，つまり，非常に珍しい現象かどうかを判断するための

確率を，有意水準または危険率と呼ぶ。

有意水準としては，一般に，次の値を採用する。

0.05（5%），0.025（2.5%），0.01（1%）

例えば，有意水準を 0.05 にした場合，有意水準 5%で仮説検定をするという。大ざっぱな検定をするときは 0.05，厳密な検定をするときは 0.01 を有意水準にする。

仮説が捨てられたとき，検定の結果は有意であるという。有意とは，その珍しい現象は偶然に起こったものではない，何か原因があるという意味である。つまり，結果は偶然に発生したものではなく，「意味のある原因」によって発生したものと考えるわけである。

○ 仮説を捨てる ⇒ 有意である ⇒ その現象には何か原因がある
○ 仮説を捨てない ⇒ 有意ではない ⇒ その現象は単なる偶然である

仮説 H_0 は，真か偽のいずれかである。真のとき捨てない，偽のとき捨てる，が正しい判断だが，逆の判断，すなわち，真のとき捨てる（第 1 種の誤り），偽のとき捨てない（第 2 種の誤り）という誤りを犯す可能性がある。

● 第 1 種の誤り … 仮説 H_0 が真であるにもかかわらず，それを捨てる誤り
● 第 2 種の誤り … 仮説 H_0 が偽であるにもかかわらず，それを捨てない誤り

H_0 の実際の真偽 ⇒	H_0 は真	H_0 は偽
H_0 を捨てない	正しい判断	第 2 種の誤り
H_0 を捨てる	第 1 種の誤り	正しい判断

有意水準は，第 1 種の誤りを犯す確率でもある。つまり，仮説が真であるにもかかわらず，その仮説を捨ててしまう確率である。有意水準（危険率）5%とは，仮説が棄却されたとき，仮説は偽であると主張してよいが，その主張が誤りである危険性は 5%あるという意味である。その意味で，有意水準を危険率ともいう。

4. 仮説検定の手順

一般に，仮説検定の手順は，次のようになる。

① 大きさ n の標本の無作為抽出によって，ある標本値 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を観測する。

② この標本から，母集団の未知母数に関する仮説 H_0 を立てる。（H_0 が正しいと仮定する）

③ H_0 の検定に必要な検定統計量 $T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を選び，仮説 H_0 の下での T の標本分布を求めておく。（検定統計量とは，仮説検定を行うための統計量のこと）

④ T の実現値 $t_0 = T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を計算する。

⑤ 有意水準 α を決める。（α は 0.05，0.025，0.01 など）

⑥ 有意水準αの棄却域Rを決める。棄却域とは,

$$P(T \in R) = \alpha$$

を満たす数直線上の区間Rのことである。この等式は，Tの値が区間Rに入る確率がαであることを意味し，Rに入るTの値は，有意水準αで有意であるという。数直線上のR以外の範囲を採択域ともいう。

⑦ t_0がRに入るかどうかを調べ，次のように判断する。

○ t_0が棄却域Rに入る ⇒ H_0を棄却する（t_0は有意である）
○ t_0が棄却域Rに入らない ⇒ H_0を棄却しない（t_0は有意でない）

母平均や母分散などの未知母数θに対する有意水準αの仮説検定では，通常は，次の(1)～(3)のいずれかのタイプになる。棄却域Rは，対立仮説の設定の仕方で決まる。(以下の a，b，θ_0はみな定数である。)

(1) 右側検定

帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$
対立仮説 $H_1 : \theta > \theta_0$
$P(T \geq a) = \alpha$，棄却域$R : a \leq t$

(2) 左側検定

帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$
対立仮説 $H_1 : \theta < \theta_0$
$P(T \leq a) = \alpha$，棄却域$R : t \leq a$

(3) 両側検定

帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$
対立仮説 $H_1 : \theta \neq \theta_0$
$P(T \leq a) = \alpha/2$，$P(T \geq b) = \alpha/2$
棄却域$R : t \leq a$ または $b \leq t$

帰無仮説H_0は，通常，$\theta = \theta_0$のように等号にする。その理由は，等号にしないと棄却域が具体的に決まらないからである。

対立仮説H_1は，帰無仮説H_0が棄却されたときに，我々が採用する仮説である。別な表現をすれば，調べたい内容，問題にしている内容を対立仮説にする。

① θが10より大きいのかどうかを調べたい ⟹ $H_1 : \theta > 10$
② θが10より小さいのかどうかを調べたい ⟹ $H_1 : \theta < 10$
③ θが10と異なるのかどうかを調べたい ⟹ $H_1 : \theta \neq 10$

5. 標準正規分布における棄却域

検定統計量Tが正規分布に従う場合，Tに関する確率計算は標準化して行うことになる。従って，Tの分布の棄却域ではなく，標準正規分布をなすTの標準測度Zの棄却域を考えればよい。

Zの分布の棄却域Rは，有意水準αに対して，100α %点を使用して定義される。この値は逆分布表からすぐにわかる。

以下では，有意水準 $\alpha = 0.05$ の場合の棄却域だけを説明する。

● **標準正規分布の棄却域**

確率変数Zが標準正規分布に従うとき，有意水準$\alpha = 0.05$の場合は，棄却域を以下のように設定する。

(1) 有意水準5%の両側検定

① 両側5%点 $z(0.025) = 1.96$， $P(|Z| \geq 1.96) = 0.05$

② 棄却域R : $|z| \geq 1.96$ （すなわち， $z \geq 1.96$ または $z \leq -1.96$ ）

(2) 有意水準5%の右側検定

① 上側5%点 $z(0.05) = 1.645$， $P(Z \geq 1.645) = 0.05$

② 棄却域R : $z \geq 1.645$

(3) 有意水準5%の左側検定

① 下側5%点 $-z(0.05) = -1.645$， $P(Z \leq -1.645) = 0.05$

② 棄却域R : $z \leq -1.645$

6. 具体例

次の問題で少し詳しく説明しよう。

■ **問題**

昭和◯◯年度の共通1次試験の全受験者約33万人の英語の成績は

平均点 ＝ 61.2点，　標準偏差 ＝ 13.4点

であった。一方，A市から無作為抽出した受験者144人の英語の成績の平均は63.5点であった。このとき，A市の全受験者の英語の成績の平均は，全国平均よりも高いといえるのだろうか。有意水準5%で検定せよ。ただし，A市の受験者の英語の標準偏差は，全受験者の標準偏差13.4と同じであると考えてよい。

＜解説＞

英語の全国平均は61.2点である。では，A市の全受験者の英語の平均点は，61.2点と同じくらいなのか，それよりも高いのか低いのか。これを調べるために，A市の受験者を何人か抽出

して検定をする。

あるいは，A 市の受験者 144 人を調べたら，その平均は 63.5 点であり，全国平均よりも高いことがわかった。当然，全国平均よりも高いのではないかという疑問が起こり，それを調べるために検定をする。または，全国平均よりも高いことを主張したいために検定をする。

このように，検定の動機はいろいろである。いずれにせよ，この問題では，次のことを調べよと言っている。

（※）A 市の受験者の英語の成績の平均は，全国平均（61.2）よりも高いといえるか

そこで，A 市の全受験者を母集団とし，その英語の成績（母平均）を μ とすると，次の状況になる。

○ 母集団 … A 市の受験者全体
（個体の特性値 X は英語の成績，母平均は μ，母分散は $\sigma^2 = (13.4)^2$）

○ 試行 … 母集団からの大きさ $n = 144$ の標本の無作為抽出
（大きさ 144 の標本平均 $\overline{X}$ の実現値 $\bar{x} = 63.5$）

そこで，仮説

$H_0 : \mu = 61.2$ （帰無仮説）

$H_1 : \mu > 61.2$ （対立仮説）

を立てて，H_0 が正しいと仮定する。　標本の大きさは $n = 144 \geq 30$ であるから，大標本である。従って，仮説の H_0 の下では，標本平均 $\overline{X}$ は，中心極限定理により，正規分布

$$N(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n})\quad \text{すなわち}\quad N(61.2,\ \frac{13.4^2}{144})$$

に従うことになる。(すなわち，仮説 H_0 が正しいと仮定すれば，標本平均 $\overline{X}$ の確率分布が具体的に決まるわけである。従って，$\overline{X}$ は検定統計量になる。)

ここで，$\overline{X}$ を標準化して

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X} - 61.2}{\dfrac{13.4}{\sqrt{144}}}$$

とおくと，$Z \sim N(0, 1)$ となる。（Z も検定統計量である。）

一方，我々が観測した標本に対する Z の実現値 z_0 を計算すると，

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{63.5 - 61.2}{\dfrac{13.4}{\sqrt{144}}} = (63.5 - 61.2) \times \frac{\sqrt{144}}{13.4} = 2.059\cdots$$

Z の分布において, 有意水準 5%の右側検定の棄却域は，$R : z \geq 1.645$ であり，$z_0 \geq 1.645$

であるから，z_0 は棄却域 R に入る。

従って，仮説 H_0 は棄却されるので，有意水準 5%では，A 市の受験者の英語の成績の平均は，全国平均よりも高いといえる。

● 注意

帰無仮説 H_0 が棄却されなかったときの解釈について注意する。

上の問題を有意水準 1%で右側検定すれば，標準正規分布の上側 1%点は $z(0.01) = 2.326$ であるから，棄却域は $R : z \geq 2.326$ となり，H_0 は棄却されない。

H_0 が棄却されないときは，次の(1)のように表現するとよい。なお，(2)のように表現している解説書もあるので注意しよう。

(1)　A 市の受験者の英語の成績の平均は，全国平均よりも高いとはいえない。

(2)　A 市の受験者の英語の成績の平均は，全国平均と同じであるといえる。

(2)のような解説書では，H_0 の評価に重点をおき，H_0 が棄却されなかったとき，H_0 を採択する（受容する）と表現する。これは，H_0 が偽であることを言えなかったので，H_0 が真であることを積極的に主張はしないが一応は認めるという考え方である。そのため，(2)のように，H_0 が真であることを弱く主張する。

(1)のように表現する解説書では，H_1 の評価に重点をおき，H_0 が棄却されなかったとき，H_1 が真であることは言えなかったと解釈する。ただし，これは H_1 が真である根拠が見つからなかったという意味であり，H_1 の真偽については何も主張していない。上記の(1)も，「高い」という根拠が見つからなかったという意味である。

一般に，帰無仮説 H_0 が棄却されなかったときは，何もわからなかったと判断し，何も主張しないのが安全である。その意味で(1)の表現の方がよい。

7.　母平均の検定

母平均の検定とは，標本から母集団の平均を検定することである。標本のサイズや，母分散の値が既知かどうかで，検定統計量の式は異なる。ただし，標本から検定統計量の実現値を求め，その実現値が検定統計量の分布における棄却域に入るかどうかを調べる，という流れは，どのケースでも同じである。

以下の場合分けは，区間推定と同じである（p.114）。標準正規分布を用いた仮説検定を Z 検定，t 分布を用いた仮説検定を t 検定という。以下では，u は不偏標準偏差，s は標本標準偏差である。

● 母平均の Z 検定（母分散 σ^2 が既知で，正規母集団または大標本）

母平均 μ，母分散 σ^2 の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出する。

$$\text{検定統計量}\quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Z の実現値　$z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(1) 有意水準 α の右側検定

○ 検定内容：μ は μ_0 より大きいのかどうか

帰無仮説　$H_0 : \mu = \mu_0$

対立仮説　$H_1 : \mu > \mu_0$

棄却域 R ： $z \geq z(\alpha)$

(2) 有意水準 α の左側検定

○ 検定内容：μ は μ_0 より小さいのかどうか

帰無仮説　$H_0 : \mu = \mu_0$

対立仮説　$H_1 : \mu < \mu_0$

棄却域 R ： $z \leq -z(\alpha)$

(3) 有意水準 α の両側検定

○ 検定内容：μ と μ_0 は異なるのかどうか（等しいのかどうか）

帰無仮説　$H_0 : \mu = \mu_0$

対立仮説　$H_1 : \mu \neq \mu_0$

棄却域 R ： $|z| \geq z\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

● 母平均の Z 検定（母分散 σ^2 が未知で，大標本）

母平均 μ，母分散 σ^2 の母集団から大きさ n （≥ 30）の標本を無作為抽出する。

検定統計量　$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

Z の実現値　$z_0 = \dfrac{\bar{x}\sqrt{n}\ \mu_0}{\dfrac{u}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n-1}}}$　　（σ を u にする）

(1) 有意水準 α の右側検定

棄却域 R ： $z \geq z(\alpha)$

(2) 有意水準 α の左側検定

棄却域 R ： $z \leq -z(\alpha)$

(3) 有意水準 α の両側検定

棄却域 R ： $|z| \geq z\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

（注意）

大標本なので，$\sigma \fallingdotseq u \fallingdotseq s$ になる。上記では，σ を u に置き換えて Z の実現値

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{u}{\sqrt{n}}}$$

を考えているが，次のように，σ を s に置き換えて計算しているテキストもある。

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$$

● **母平均の t 検定（母分散 σ^2 が未知で，正規母集団かつ小標本）**

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から大きさ n の標本を無作為抽出する。

検定統計量　$T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\dfrac{U}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$

T の実現値　$t_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{u}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n-1}}}$

(1) 有意水準 α の右側検定

棄却域 R ： $t \geq t_{n-1}(2\alpha)$

(2) 有意水準 α の左側検定

棄却域 R ： $t \leq -t_{n-1}(2\alpha)$

(3) 有意水準 α の両側検定

棄却域 R ： $|t| \geq t_{n-1}(\alpha)$

8. 練習問題

検定の問題の解法は，区間推定と同様，ワンパターンである。検定統計量の値を計算するだけである。

● **問題**

母平均が μ，母分散が σ^2 の母集団から，大きさ n の標本を無作為抽出した。標本平均を $\bar{x}$，標本分散を s^2，不偏分散を u^2 とする。

(1) 正規母集団，$\sigma = 4$，$n = 10$，$\bar{x} = 38$ のとき，母平均 μ は 35 より大きいのかどうかを有意水準 1%で検定せよ。

(2) $\sigma = 6$，$n = 45$，$\bar{x} = 38$ のとき，母平均 μ は 40 より小さいのかどうかを有意水準 1%で検定せよ。

(3) σ^2 は未知，$n = 70$，$\bar{x} = 38$，$u^2 = 64$ のとき，母平均 μ は 40 と異なるのかどうかを有意水準 5%で検定せよ。

(4) σ^2 は未知，正規母集団，$n = 15$，$\bar{x} = 44$，$s^2 = 25$ のとき，母平均 μ は 40 と異なるのかどうかを有意水準 5%で検定せよ。

＜解答＞

(1) 次の仮説を立てる。

$$H_0 : \mu = 35$$
$$H_1 : \mu > 35$$

母分散が既知で正規母集団であるから，Z 検定による右側検定になる。

$\sigma = 4$，$n = 10$，$\bar{x} = 38$ であるから，

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{38 - 35}{\frac{4}{\sqrt{10}}} = 2.3717\cdots$$

$$P(0 \le Z \le z(0.01)) = 0.5 - 0.01 = 0.49$$

従って，逆分布表より，$z(0.01) = 2.326$

棄却域は $R : z \ge 2.326$ であるから，z_0 は R に入る。

よって，仮説 H_0 は棄却されるので，有意水準 1%では，母平均 μ は 35 より大きいといえる。

(2) 次の仮説を立てる。

$$H_0 : \mu = 40$$
$$H_1 : \mu < 40$$

母分散が既知で大標本であるから，Z 検定による左側検定になる。

$\sigma = 6$, $n = 45$, $\bar{x} = 38$ であるから,

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{38 - 40}{\frac{6}{\sqrt{45}}} = -2.2360\cdots$$

$$P(0 \leq Z \leq z(0.01)) = 0.5 - 0.01 = 0.49$$

従って，逆分布表より，$z(0.01) = 2.326$

棄却域は $R : z \leq -2.326$ であるから，z_0 は R に入らない。

よって，仮説 H_0 は棄却されないので，有意水準 1%では，母平均 μ は 40 より小さいとはいえない。

(3) 次の仮説を立てる。

$$H_0 : \mu = 40$$
$$H_1 : \mu \neq 40$$

母分散が未知で大標本であるから，Z 検定による両側検定になる。ただし，σ は u に置き換える。

$n = 70$, $\bar{x} = 38$, $u^2 = 64$ であり，$u = \sqrt{64} = 8$ であるから,

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{u}{\sqrt{n}}} = \frac{38 - 40}{\frac{8}{\sqrt{70}}} = -2.0916\cdots$$

標準正規分布の両側 5%点は，$z(0.025) = 1.96$

棄却域は $R : |z| \geq 1.96$ であるから，z_0 は R に入る。

よって, 仮説 H_0 は棄却されるので, 有意水準 5%では, 母平均 μ は 40 と異なるといえる。

(4) 次の仮説を立てる。

$$H_0 : \mu = 40$$
$$H_1 : \mu \neq 40$$

母分散が未知で，正規母集団かつ小標本であるから，t 検定による両側検定になる。

$n = 15$, $\bar{x} = 44$, $s^2 = 25$ であるから,

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{u}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{44 - 40}{\frac{5}{\sqrt{15 - 1}}} = 2.99332\cdots$$

自由度が 14 の t 分布の両側 5%点は，$t_{14}(0.05) = 2.145$

棄却域は $R : |t| \geq 2.145$ であるから，t_0 は R に入る。

よって，仮説 H_0 は棄却されるので，有意水準 5%では，母平均 μ は 40 と等しくないといえる。

9. 母比率の検定

● **母比率の Z 検定（大標本）**

母集団に対して，性質 E を持つ個体の母比率を p とする。この母集団から，大きさ n（≥ 30）の標本を無作為抽出し，標本比率を $\hat{P}$ とする。

$$\text{検定統計量} \quad Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$Z \text{ の実現値} \quad z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1 - p_0)}{n}}} = \frac{n\hat{p} - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

(1) 有意水準 α の右側検定

○ 検定内容： p は p_0 より大きいのかどうか

帰無仮説 $H_0 : p = p_0$

対立仮説 $H_1 : p > p_0$

棄却域 $R : z \geq z(\alpha)$

(2) 有意水準 α の左側検定

○ 検定内容： p は p_0 より小さいのかどうか

帰無仮説 $H_0 : p = p_0$

対立仮説 $H_1 : p < p_0$

棄却域 $R : z \leq -z(\alpha)$

(3) 有意水準 α の両側検定

○ 検定内容： p は p_0 に等しいのかどうか

帰無仮説 $H_0 : p = p_0$

対立仮説 $H_1 : p \neq p_0$

棄却域 $R : |z| \geq z\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

■ **例題**

ある商品について，それを知っているかどうかを無作為抽出した 400 人について調べたところ，知っていると答えた人が 118 人いた。（従って，400 人中 29.5%の人が知っていたわけである。）このとき，この商品を知っている人の全体の割合は，25%よりも多いと考えてよいのだろうか。有意水準 5%で検定せよ。

＜解答＞

商品を知っている人の全体の割合を p とし，次の仮説を立てる。

$$H_0 : p = 0.25$$
$$H_1 : p > 0.25$$

標本の大きさは $n = 400$ であり，大標本である。

標本比率は $\hat{p} = 118/400$ であるから，

$$z_0 = \frac{n\hat{p} - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} = \frac{118 - 400 \times 0.25}{\sqrt{400 \times 0.25 \times (1 - 0.25)}} = 2.078\cdots$$

$$P(0 \leq Z \leq z(0.05)) = 0.5 - 0.05 = 0.45$$

従って，逆分布表より， $z(0.05) = 1.645$

棄却域は $R : z \geq 1.645$ であるから， z_0 は棄却域に落ちる。

よって，仮説 H_0 は捨てられる。従って，有意水準 5%では，商品を知っている人の全体の割合は，25%よりも多いといえる。