7. 確率変数の独立性

1. 二重のシグマ

x_i と書いたら，i が添え字（インデックス）であり，添え字の種類は i の 1 種類である。x_k や x_r も同様である。

n を自然数とするとき，x_i において添え字 i を整数値として 1 から n まで動かし，n 個の数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ をつくり，これらの和を $\sum_{i=1}^{n} x_i$ で表した。すなわち

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

n 個の数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は，次のようにも表現する。

$$x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

次は，m と n を自然数とし，添え字が i と j の 2 種類の x_{ij} を考え，$m \times n$ 個の数

$$x_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, m \ ; \ j = 1, 2, \cdots, n)$$

を考える。ここで，i と j は独立に自由に動く。

$m \times n$ 個の数 x_{ij} を具体的に書けば，次のとおり。また，横合計も次のとおり。

$$
\begin{array}{llllll}
x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & \cdots\cdots, & x_{1n} & \left(横合計 \ \sum_{j=1}^{n} x_{1j}\right) \\
x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & \cdots\cdots, & x_{2n} & \left(横合計 \ \sum_{j=1}^{n} x_{2j}\right) \\
x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & \cdots\cdots, & x_{3n} & \left(横合計 \ \sum_{j=1}^{n} x_{3j}\right) \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & \\
x_{m1}, & x_{m2}, & x_{m3}, & \cdots\cdots, & x_{mn} & \left(横合計 \ \sum_{j=1}^{n} x_{mj}\right)
\end{array}
$$

これら $m \times n$ 個の数の合計は横合計の合計なので，次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} x_{1j} + \sum_{j=1}^{n} x_{2j} + \sum_{j=1}^{n} x_{3j} + \cdots\cdots + \sum_{j=1}^{n} x_{mj}$$

この左辺の二重のシグマは，( )を取って次のようにも表す。

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

これを二重和ともいう。

また，$m \times n$ 個の数の合計は，次のようにもなる（縦合計で考える）。

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{m} x_{i1} + \sum_{i=1}^{m} x_{i2} + \sum_{i=1}^{m} x_{i3} + \cdots\cdots + \sum_{i=1}^{m} x_{in}$$

この左辺も，( )を取って次のようにも表す。

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

なお，$\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ を，簡単に $\displaystyle\sum_{i}\sum_{j} x_{ij}$ や $\displaystyle\sum_{i,\, j} x_{ij}$ で表すこともある。

以上をまとめると以下のようになるが，(3)も重要である。

● **まとめ**

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)$

(3)は，次の等式を意味する。この左辺は，$m \times n$ 個の積 $x_i y_j$ の合計である。

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j = (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

証明すると，

$$\text{左辺} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(x_i \sum_{j=1}^{n} y_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)$$

なお，(1)の二重のシグマは，$m \times n$ 個の数 x_{ij} の合計であるから，すべての組 $(i,\ j)$ に対して x_{ij} を考え，それらを合計したものである。

例えば，x_{ij}（$i = 1,\ 2$ ； $j = 1,\ 2$）のときは，すべての組 $(i,\ j)$ は

$$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)$$

であるから，

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ij} = x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22}$$

となる。同様に，

$$x_{ijk}\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ l\ ;\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m\ ;\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

のような，添え字が 3 種類のときは，

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = \sum_{i=1}^{l}\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}\right)\right\}$$

は，$l \times m \times n$ 個の数 x_{ijk} の合計である。

■ 例題

2 個のサイコロ a，b を同時に投げたとき，a の目と b の目のすべての積の合計を求めよ。

（解答）

a の目を i，b の目を j で表せば，36（＝6×6）個の積

$$i \times j \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 6\ ;\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$

が登場するので，それらの合計を求めればよい。従って，合計は

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(i \times j) &= \left(\sum_{i=1}^{6} i\right)\left(\sum_{j=1}^{6} j\right) \\ &= (1+2+3+4+5+6)\,(1+2+3+4+5+6) \\ &= 21 \times 21 = 441 \text{（答）}\end{aligned}$$

なお，3 個のサイコロの場合は，それらの目のすべての積の合計は，次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}(i \times j \times k) = \left(\sum_{i=1}^{6} i\right)\left(\sum_{j=1}^{6} j\right)\left(\sum_{j=1}^{6} k\right)$$

$$= (1+2+3+4+5+6)\,(1+2+3+4+5+6)\,(1+2+3+4+5+6)$$

2. 同時確率分布

試行 T における 2 つの確率変数 X，Y を考える。

実数 a，b に対して，「$X = a$ かつ $Y = b$」となる事象の確率を，$P(X = a, Y = b)$ で表す。これは，積事象の確率である。すなわち，$X = a$ となる事象を A，$Y = b$ となる事象を B とすると，

$$P(X = a,\ Y = b) = P(A \cap B)$$

確認すると，T の標本空間を Ω とすれば，

$$A = \{\ \omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\ \},\quad B = \{\ \omega \in \Omega \mid Y(\omega) = b\ \}$$

である。$X(\omega)$ などは，標本点 ω に対して定まる X の実現値である。従って，集合 A は，実現値が a になるような標本点全体の集合である。また，積事象 $A \cap B$ は，A と B がともに起こる事象である。

なお，本来 A などは

$$A = \{\ \omega \mid \omega \in \Omega,\ X(\omega) = a\ \}$$

と表記すべきであるが，上記のように書いてもよい。よって，積事象は次のようになる。

$$A \cap B = \{\ \omega \in \Omega \mid X(\omega) = a,\ Y(\omega) = b\}$$

いま，X の確率分布が次のとおりとする。

$$P(X = x_i) = p_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

これは，X のとり得る異なる値が x_1，x_2，$\cdots$，x_m であり，X が x_i をとる確率が p_i という

意味である。要するに，次の確率分布表が与えられたという意味である。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_m	1

● 同時確率分布の定義

X, Y を試行 T における確率変数とする。

(1) 組 (X, Y) を 2 次元確率変数という。

(2) X, Y のそれぞれの確率分布が次のとおりとする。

$P(X = x_i) = p_i$ （$1 \leq i \leq m$）

$P(Y = y_j) = q_j$ （$1 \leq j \leq n$）

このとき，

$$P(X = x_i,\ Y = y_j) = p_{ij} \quad （1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n）$$

であるとき，これを (X, Y) の同時確率分布という。

同時確率分布を表で示したものを同時確率分布表という。また，X の確率分布を X の周辺分布，Y の確率分布を Y の周辺分布という。

X の確率分布 $P(X = x_i) = p_i$ は，X の実現値 x_i とその確率 p_i との対応関係を示したものである。同時確率分布 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ は，実現値の組 $(x_i,\ y_j)$ とその確率 p_{ij} との対応を示したものである。

(X, Y) の同時確率分布表は，次のようになる。

$X \backslash Y$	y_1	$\cdots\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n	計
x_1	p_{11}	$\cdots\cdots$	p_{1j}	$\cdots\cdots$	p_{1n}	p_1
$\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots\cdots$	p_{ij}	$\cdots\cdots$	p_{in}	p_i
$\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots$
x_m	p_{m1}	$\cdots\cdots$	p_{mj}	$\cdots\cdots$	p_{mn}	p_m
計	q_1	$\cdots\cdots$	q_j	$\cdots\cdots$	q_n	1

上記の表では，次が成立している。これは具体例で考えれば，すぐにわかる。

(1) 確率の横合計は右端の確率に一致，確率の縦合計は下端の確率に一致する。

(2) 全確率 p_{ij} の合計は 1 である。すなわち，$\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$

■ 例

試行Tにおける 2 つの確率変数X, Yの確率分布が，次のとおりとする。

X	x_1	x_2	計
P	p_1	p_2	1

Y	y_1	y_2	計
P	q_1	q_2	1

このとき，

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \quad (1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 2)$$

とおき，2 次元確率変数(X, Y)の同時確率分布を定める。

(1)　(X, Y)の同時確率分布表は，右のとおり。

X \ Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

(2)　確率の横合計

$$p_{11} + p_{12} = p_1$$
$$p_{21} + p_{22} = p_2$$

(3)　確率の縦合計

$$p_{11} + p_{21} = q_1$$
$$p_{12} + p_{22} = q_2$$

(4)　確率の全合計

$$p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 1$$

（説明）上記を説明する。以下の考え方は，一般の同時確率分布でも同じである。

Tの標本空間をΩとし，次の 4（＝2×2）つの事象A_1，A_2，B_1，B_2を考える。

$$A_1 = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_1\},\quad P(A_1) = P(X = x_1) = p_1$$
$$A_2 = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_2\},\quad P(A_2) = P(X = x_2) = p_2$$
$$B_1 = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = y_1\},\quad P(B_1) = P(Y = y_1) = q_1$$
$$B_2 = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = y_2\},\quad P(B_2) = P(Y = y_2) = q_2$$

このとき，

$$P(A_1 \cap B_1) = P(X = x_1, Y = y_1) = p_{11}$$
$$P(A_1 \cap B_2) = P(X = x_1, Y = y_2) = p_{12}$$
$$P(A_2 \cap B_1) = P(X = x_2, Y = y_1) = p_{21}$$
$$P(A_2 \cap B_2) = P(X = x_2, Y = y_2) = p_{22}$$

Ω

	B_1	B_2	
A_1	p_{11}	p_{12}	p_1
A_2	p_{21}	p_{22}	p_2
	q_1	q_2	

X \ Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

ここで，上記の図のように，標本空間Ωは排反な 4 つの事象で

$$A_1 \cap B_1,\quad A_1 \cap B_2,\quad A_2 \cap B_1,\quad A_2 \cap B_2$$

で分割されているので，次が自明になる。（上の 2 つの図は完全に対応している。）

横合計 $p_{11} + p_{12} = p_1$，$p_{21} + p_{22} = p_2$
縦合計 $p_{11} + p_{21} = q_1$，$p_{12} + p_{22} = q_2$

確認すれば，Ωは排反なA_1とA_2で分割されている。この意味は，

$$\Omega = A_1 \cup A_2,\quad A_1 \cap A_2 = \phi$$

実際，どの標本点ωに対しても，$X(\omega)$の値はx_1またはx_2であるので，$\omega \in A_1 \cup A_2$である。従って，$\Omega = A_1 \cup A_2$ である。また，x_1とx_2は異なるので，$A_1 \cap A_2 = \phi$ となる。

同様に，Ωは排反なB_1とB_2で分割されるので，Ωはどの 2 つも排反な 4 つの事象 $A_1 \cap B_1$，$A_1 \cap B_2$，$A_2 \cap B_1$，$A_2 \cap B_2$ で分割されていることになる。

従って，例えば，

$$A_1 = (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2),\quad (A_1 \cap B_1) \cap (A_1 \cap B_2) = \phi$$

であるから，確率の加法定理（高校数学 I）から

$$P(A_1) = P(A_1 \cap B_1) + P(A_1 \cap B_2)$$

従って，次が成立する。

$$p_1 = p_{11} + p_{12}$$

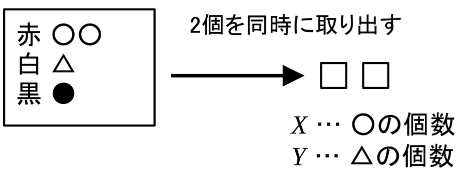
他も同様であるが，これらは，上記のΩの分割状態を見ればすぐにわかる。

■ **例題**

袋の中に，赤玉 2 個，白玉 1 個，黒玉 1 個が入っている。この袋から 2 個の玉を同時に取り出すとき，この 2 個に含まれる赤玉の個数をX，白玉の個数をYとする。このとき，(X, Y)の同時確率分布表を求めよ。また，Xの周辺分布とYの周辺分布を求めよ。

＜解答＞

赤玉を○，白玉を△，黒玉を●で表す。



試行の標本点（取り出した 2 個）を｛□，□｝で表すと，｛○，○｝，｛○，△｝，｛○，●｝，｛△，●｝の 4 通りの場合がある。それぞれの場合の数を求めると

｛○，○｝… 1 通り $\Longrightarrow$ $X = 2$，$Y = 0$

{○，△} … 2通り ⇒ $X=1$，$Y=1$
{○，●} … 2通り ⇒ $X=1$，$Y=0$
{△，●} … 1通り ⇒ $X=0$，$Y=1$

X ＼ Y	0	1	計
0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
計	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

従って，起こり得るすべての場合の数は6通りであり，

$P(X=0,\ Y=0)=0$

$P(X=0,\ Y=1)=1/6$

$P(X=1,\ Y=0)=2/6$

$P(X=1,\ Y=1)=2/6$

$P(X=2,\ Y=0)=1/6$

$P(X=2,\ Y=1)=0$

あとは，横合計，縦合計を求めると，$(X,\ Y)$の同時確率分布表は上のようになる。

従って，X の周辺分布とYの周辺分布は，次のとおり。（なお，同時確率分布表に周辺分布の確率を書けば，下の表は書かなくてもよい。）

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Y	0	1	計
P	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

3. 2次元確率変数の関数の平均

● 2次元確率変数の関数の平均

X,Yを試行Tにおける確率変数とし，$\varphi(X,Y)$をX，Yの関数とする。

(1) $\varphi(X,\ Y)$は，Tにおける確率変数になる。

(2) X,Yのそれぞれの確率分布が次のとおりとする。

$P(X=x_i)=p_i$（$1\leq i\leq m$）

$P(Y=y_j)=q_j$（$1\leq j\leq n$）

このとき，$\varphi(X,Y)$の平均は

$$E(\varphi(X,Y))=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(x_i,y_j)P(X=x_i,\ Y=y_j)$$

(3) $\varphi(X,Y)=X+Y$のとき，

$$E(X+Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i+y_j)P(X=x_i,\ Y=y_j)$$

(4) $\varphi(X,Y)=XY$のとき，

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j P(X = x_i,\ Y = y_j)$$

（説明）

X，Y の関数 $\varphi(X, Y)$ とは，X，Y からつくられた式のことである。例えば，

$$\varphi(X, Y) = X + Y,\ XY,\ 2X + 3Y,\ X^2 + 3Y^2 + 5XY,\ \cdots\cdots$$

T の標本点 ω に対して，X の値が a，Y の値が b ならば，$\varphi(X, Y)$ の値は $\varphi(a, b)$ になる。従って，T の標本点に対して $\varphi(X, Y)$ の値が定まるので，$\varphi(X, Y)$ は確率変数になる。

⑵については，$m = 2$，$n = 2$ の場合を証明する。一般の場合も同様である。

前述のように，T の標本空間 Ω の分割状態を考えればよい。

Ω

	B_1	B_2	
A_1	p_{11}	p_{12}	p_1
A_2	p_{21}	p_{22}	p_2
	q_1	q_2	

$X \backslash Y$	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

証明すべき等式は

$$\begin{aligned} E(\varphi(X, Y)) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \varphi(x_i, y_j) P(X = x_i,\ Y = y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \varphi(x_i, y_j) p_{ij} \end{aligned}$$

従って，次の等式が成立することを証明すればよい。

$$E(\varphi(X, Y)) = \varphi(x_1, y_1) p_{11} + \varphi(x_1, y_2) p_{12} + \varphi(x_2, y_1) p_{21} + \varphi(x_2, y_2) p_{22}$$

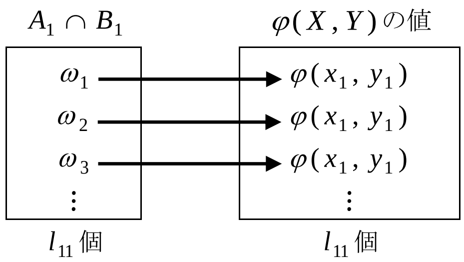
いま，$n(\Omega) = N$，$n(A_i \cap B_j) = l_{ij}$ とおくと，

$$p_{ij} = \frac{n(A_i \cap B_j)}{n(\Omega)} = \frac{l_{ij}}{N}$$

また，次が成り立つ。

$A_i \cap B_j$ のどの標本点 ω に対しても，$\varphi(X, Y)$ の実現値は $\varphi(x_i, y_j)$

例えば，$\omega \in A_1 \cap B_1$ ならば，$X(\omega) = x_1$，$Y(\omega) = y_1$ であるから，ω から定まる $\varphi(X, Y)$ の値は，必ず $\varphi(x_1, y_1)$ である（下図参照）



$\varphi(X, Y)$の平均 $E(\varphi(X, Y))$は，$\varphi(X, Y)$のすべての実現値の平均であるから，

$$
\begin{aligned}
&E(\varphi(X, Y)) \\
&= \frac{1}{N}\left\{\varphi(x_1, y_1) \times l_{11} + \varphi(x_1, y_2) \times l_{12} + \varphi(x_2, y_1) \times l_{21} + \varphi(x_2, y_2) \times l_{22}\right\} \\
&= \varphi(x_1, y_1) \times \frac{l_{11}}{N} + \varphi(x_1, y_2) \times \frac{l_{12}}{N} + \varphi(x_2, y_1) \times \frac{l_{21}}{N} + \varphi(x_2, y_2) \times \frac{l_{22}}{N} \\
&= \varphi(x_1, y_1) p_{11} + \varphi(x_1, y_2) p_{12} + \varphi(x_2, y_1) p_{21} + \varphi(x_2, y_2) p_{22}
\end{aligned}
$$

従って，証明された。特に，$\varphi(X, Y) = X + Y$，XY のときは，次のようになる。

○ $E(X + Y) = (x_1 + y_1) p_{11} + (x_1 + y_2) p_{12} + (x_2 + y_1) p_{21} + (x_2 + y_2) p_{22}$

○ $E(XY) = x_1 y_1 p_{11} + x_1 y_2 p_{12} + x_2 y_1 p_{21} + x_2 y_2 p_{22}$

4. 複数の確率変数

● 複数の確率変数

1 つの試行 T から，複数の確率変数を考える。

① 試行 T → 2 つの確率変数 X, Y

② 試行 T → n 個の確率変数 X_1，X_2，…，X_n

試行 T から 2 つの確率変数 X, Y を考える。このとき，前述したように，X と Y から作られる次のような式は，すべて T における確率変数になる。

$$X + Y, \quad XY, \quad \frac{1}{2}(X + Y)$$

同様に，試行 T から n 個の確率変数 X_1，X_2，…，X_n を考えた場合，

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad X_1 X_2 \cdots X_n, \quad \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

などは，試行 T の結果に対して対して値が定まるので，みな確率変数になる。

実際，試行 T の結果に対して，X_1 の値が a_1，X_2 の値が a_2，…，X_n の値が a_n ならば，

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \text{ の値は，} a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ の値は，$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

要するに，確率変数からつくられる式は，みな確率変数になると理解すればよい。

5. 確率変数の和の平均

● **2 つの確率変数の和の平均**

試行 T における 2 つの確率変数 X, Y について，次が成り立つ。

(1) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ （和の平均は平均の和）

(2) $E(aX + bY) = a\,E(X) + b\,E(Y)$ （a，b は任意の定数）

（注）

(2)において，b を $-b$ に変えれば，次も成り立つ。

$$E(aX - bY) = a\,E(X) - b\,E(Y)$$

従って，$a = b = 1$ のとき

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

(1) 上の(1)は，通常は，同時確率分布で証明する。

話を簡単にするために，(X, Y) の同時確率分布は右のようになっているとしよう。このとき，

$X \backslash Y$	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(x_i + y_j)\,p_{ij} \\
&= (x_1 + y_1)p_{11} + (x_1 + y_2)p_{12} \\
&\quad + (x_2 + y_1)p_{21} + (x_2 + y_2)p_{22} \\
&= x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}) + y_1(p_{11} + p_{21}) + y_2(p_{12} + p_{22}) \\
&= x_1 p_1 + x_2 p_2 + y_1 q_1 + y_2 q_2 \\
&= E(X) + E(Y)
\end{aligned}
$$

（証明終）

(2) ただし，実現値を考えれば，(1)の等式は自明である。

いま，試行 T の標本点の個数を l とし，標本空間を

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_l\}$$

とする。ω_i に対して定まる X の値を x_i，Y の値を y_i で表せば，ω_i に対して定まる $X + Y$ の値は，$x_i + y_i$ である。

標本点	X の値	Y の値	$X+Y$ の値
ω_1	x_1	y_1	$x_1 + y_1$
ω_2	x_2	y_2	$x_2 + y_2$

…	…	…	…
ω_l	x_l	y_l	$x_l + y_l$
平均	$\bar{x}$	$\bar{y}$	

$x_1, x_2, \cdots, x_l$ の平均を $\bar{x}$，$y_1, y_2, \cdots, y_l$ の平均を $\bar{y}$ とすると

$$E(X) = \bar{x}, \quad E(Y) = \bar{y}$$

同様に，$E(X+Y)$ は，$X+Y$ の実現値の平均であるから，

$$E(X+Y) = \frac{1}{l}\{(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots\cdots+(x_l+y_l)\}$$
$$= \frac{1}{l}\{(x_1+x_2+\cdots+x_l)+(y_1+y_2+\cdots+y_l)\}$$
$$= \frac{1}{l}(x_1+x_2+\cdots+x_l)+\frac{1}{l}(y_1+y_2+\cdots+y_l)$$
$$= \bar{x}+\bar{y} = E(X)+E(Y)$$ （証明終）

(3) 定数 a, b に対して，aX, bY はともに確率変数になるので，(1)より，

$$E(aX+bY) = E(aX)+E(bY)$$

一方，1 次変換の公式より，$E(aX) = aE(X)$，$E(bY) = bE(Y)$ なので，

$$E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$$

6. n 個の確率変数の和の平均

● n 個の確率変数の和の平均

n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ について，次が成り立つ。

(1) $E(X_1+X_2+\cdots+X_n) = E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$

すなわち $E(\sum_i X_i) = \sum_i E(X_i)$

(2) $E(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n) = a_1E(X_1)+a_2E(X_2)+\cdots+a_nE(X_n)$

すなわち $E(\sum_i a_iX_i) = \sum_i a_iE(X_i)$ （各 a_i は定数）

(1) 3 つの確率変数 X_1, X_2, X_3 の場合は，$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$ を繰り返し用いると，

$$E(X_1+X_2+X_3) = E((X_1+X_2)+X_3) = E(X_1+X_2)+E(X_3)$$
$$= E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)$$

n 個の確率変数の場合も同様である。

(2) (1)から自明である。

7. 確率変数の独立性

● **定義**

X, Y を試行 T における確率変数とする。

(1) X のとる値 a と Y のとる値 b に対して，

$$P(X=a,\ Y=b) = P(X=a)P(Y=b)$$

が常に成立するとき，X と Y は（互いに）独立であるという。

(2) 従って，X, Y の確率分布が

$$P(X = x_i) = p_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$P(Y = y_j) = q_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

であるとき，X と Y が独立であるとは，すべての i，j について

$$P(X = x_i,\ Y = y_j) = P(X = x_i)\,P(Y = y_j)$$

が成立することである。

(1) 上記の定義において「とる値」は不要である。(1)においては，任意の実数 a，b に対して，

$$P(X=a,\ Y=b) = P(X=a)\,P(Y=b)$$

が成立するとき，X と Y は独立であると定義してもよい。実数 a が X の実現値でなければ，$X = a$ となる事象は空事象となり，

$$P(X=a,\ Y=b) = 0,\quad P(X=a) = 0$$

となって，上記の等式は当然成立するからである。よって，「任意の実数 a」と「X の任意の実現値 a」という表現は，同じ意味になる。

(2) $X = a$ となる事象を A，$Y = b$ となる事象を B とすれば，

$$P(X=a,\ Y=b) = P(A \cap B)$$

よって，上記の独立性の等式は，次の意味になる。

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \quad \cdots \quad ①$$

一方，高校数学 A で学習した確率の乗法定理は，

$$P(A \cap B) = P(A)\,P_A(B)$$

である。$P_A(B)$ は，事象 A が起こったときの事象 B の起こる「条件つき確率」である。

従って，等式①は，次の等式と同じである。

$$P_A(B) = P(B)$$

また，①が成立すれば，

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(B)P(A)$$

であるから，

$$P_B(A) = P(A)$$

も成立する。

さて，①が成立するとき，「事象 $A,\ B$ は互いに独立である」「$A,\ B$ は独立事象である」という。これは，事象 A が起こったことが，事象 B の確率には影響を与えないことを意味する。（同様に，事象 B が起こったことが事象 A の確率には影響を与えない。）

(3)　従って，X と Y が独立であるとは，$X = a$ という事象が起こったとしても，その事象は $Y = b$ となる事象の確率には影響を与えないという意味である。別の言い方をすれば，X がどのような実現値をとったとしても，Y のとり得る異なる値は同じであり，それらの値の確率（＝相対度数）は変わらないという意味である。

(4)　X と Y が独立であるとは，それらが無関係な変数であると直感的に理解してもよい。

(5)　定義の(2)において，$m = n = 2$ とすれば，X と Y が独立であるとは，(X, Y) の同時確率分布が次のような形になっていることである。

X \ Y	y_1	y_2	計
x_1	$p_1 q_1$	$p_1 q_2$	p_1
x_2	$p_2 q_1$	$p_2 q_2$	p_2
計	q_1	q_2	1

■ **例**

1 個のサイコロを 2 回投げるという試行 T を行い，1 回目に出た目の数を X，2 回目に出た目の数を Y とすると，次が成り立つ。

(1)　X と Y は，独立である。

(2)　$E(XY) = E(X)E(Y)$

＜解説＞

(1)　復習をかねて，少し詳しく説明しよう。

1 個のサイコロを 1 回投げたときの標本空間は $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ である。

1 個のサイコロを 2 回投げるという試行 T の標本空間は，直積

$$\Omega \times \Omega$$

になる。直積になるのは，1 回目のサイコロ投げと 2 回目のサイコロ投げは，試行として独立だからである。独立であるから，X と Y の確率分布は同じになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Y	1	2	3	4	5	6	計
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

確認すれば，例えば，$Y = 2$ となる標本点は，$(\square, 2)$ の形である。□は 1 回目の目の数だが，これはどの目でもよいので 6 通り。従って，$(\square, 2)$ となる場合の数は 6×1 通りなので，

$$P(Y = 2) = \frac{6 \times 1}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

この確率は，1 個のサイコロ 1 回投げたとき，2 の目が出る確率に等しい。つまり，試行 T は独立試行なので，$Y = b$ となる確率は，試行 T ではなく，1 個のサイコロ 1 回投げるという試行で考えてよいのである。

試行 T の標本点を書き上げれば次のようになり，全部で 36 個ある。

(1, 1)	(1, 2)	……	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	……	(2, 6)
…	…		…
(6, 1)	(6, 2)	……	(6, 6)

このとき，1 回目のサイコロ投げと 2 回目のサイコロ投げは独立試行なので，次が常に成立することは自明になる。

$$P(X = a, Y = b) = P(X = a)\,P(Y = b)$$

例えば，$X = 1$，$Y = 2$ となる標本点は (1, 2) のみであるから，

$$P(X = 1, Y = 2) = 1/36$$

一方，$P(X = 1) = 1/6$，$P(Y = 2) = 1/6$ であるから，

$$P(X = 1, Y = 2) = P(X = 1)\,P(Y = 2)$$

が成立する。従って，X と Y は，独立である。

(2) 同時確率分布を使わずに，実現値で考えると，標本点から定まる XY の実現値は

$$i \times j \quad (i = 1, 2, \cdots, 6\ ;\ j = 1, 2, \cdots, 6)$$

であり，全部で 36 個ある。この 36 個の実現値の平均が $E(XY)$ であるから，

$$E(XY) = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(i \times j) = \frac{1}{36}\left(\sum_{i=1}^{6} i\right)\left(\sum_{j=1}^{6} j\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{6} i\right) \times \frac{1}{6}\left(\sum_{j=1}^{6} j\right) = E(X)E(Y)$$ （証明終）

8. 確率変数の積 の平均

● **考察１**

$E(XY) = E(X)E(Y)$ が成り立たない例を上げよ。

(1) いくらでも例を作ることができる。例えば，コイン投げのように，標本点が 2 個しかない試行を考え，確率変数 X, Y を次のように定義する。

標本点	X のとる値	Y のとる値	XY のとる値
ω_1	1	1	1
ω_2	2	2	4

このとき，$E(X) = 3/2$，$E(Y) = 3/2$，$E(XY) = 5/2$ なので，

$$E(X)E(Y) = 9/4 \quad \therefore \ E(XY) \neq E(X)E(Y)$$

(2) とる値が，$X = 1,\ 2$，$Y = 1,\ 2$ であれば，とる値の組 (X, Y) は

$$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)$$

の 4 通りが考えられるが，(1, 2) や (2, 1) となる標本点は存在しない。これは，Y のとる値が，X のとる値によって影響を受けているからである。X が 1 のとき Y は 1，X が 2 のとき Y は 2 であり，X の値によって Y の実現値が変化するのである。従って，X と Y は独立でない。

(3) 一方，標本点が 6 つで，次のような実現値になっていたとする。

標本点	X のとる値	Y のとる値	XY のとる値
ω_1	1	1	1
ω_2	1	2	2
ω_3	2	1	2
ω_4	2	1	2
ω_5	2	2	4
ω_6	2	2	4

このとき，

$$E(X) = 10/6 = 5/3,\quad E(Y) = 9/6 = 3/2,\quad E(XY) = 15/6 = 5/2$$

なので，

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

が成立する。組 (X, Y) としては，

$$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)$$

の組がみな登場する。そして，

① $X = 1 \implies$ Y の異なる実現値は 1，2

※ Y のすべての実現値は 1，2 で，

1 の相対度数は$1/2$，2 の相対度数は$1/2$

② $X = 2 \implies$ Y の異なる実現値は 1，2

※ Y のすべての実現値は 1，1，2，2 で，

1 の相対度数は$2/4 = 1/2$，2 の相対度数は$2/4 = 1/2$

要するに，X がどのような実現値をとっても，Y のとり得る異なる実現値は変わらず，各実現値の相対度数も同じなので，X と Y は独立になる。

● **考察２**

$E(XY) = E(X)E(Y)$ は成り立つが，X と Y は独立でない例を上げよ。

(1) 残念ながら，$E(XY) = E(X)E(Y)$ が成立しても，X と Y が独立であるとは限らない。例えば，標本点が 3 個で，X と Y の実現値が次のようになっているとしよう。

標本点	X のとる値	Y のとる値	XY のとる値
ω_1	1	2	2
ω_2	1	4	4
ω_3	2	3	6

このとき，$E(X) = 4/3$，$E(Y) = 3$，$E(XY) = 4$ なので，確かに

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

が成立している。しかし，明らかに X と Y は独立ではない。実際，

$$P(X = 1, Y = 2) = 1/3,\quad P(X = 1) = 2/3,\quad P(Y = 2) = 1/3$$

なので，

$$P(X = 1, Y = 2) \neq P(X = 1)\, P(Y = 2)$$

9. 2 つの確率変数の和の分散

● **定理（2 つの確率変数の和の分散）**

試行 T における 2 つの確率変数 X, Y が独立ならば，次が成り立つ。

(1) $E(XY) = E(X)\,E(Y)$ （積の平均は平均の積）

(2) $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ （和の分散は分散の和）

(3) a, b が任意の定数のとき，

$$E(aX \cdot bY) = abE(X)\,E(Y)$$

$$V(aX+bY)=V(aX-bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)$$

（注意）

X, Y が独立であれば，任意の実数 c，d に対して，cX と dY も独立になる。(練習問題参照)

(1)　上の(1)を一般的に証明してみよう。

X, Y の確率分布および(X, Y)の同時確率分布を次のとおりとする。

$P(X=x_i)=p_i$ （$1 \leq i \leq m$）

$P(Y=y_j)=q_j$ （$1 \leq j \leq n$）

$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$ （$1 \leq i \leq m$，$1 \leq j \leq n$）

X と Y は独立であるから，すべての i，j について

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

すなわち，

$$p_{ij}=p_iq_j$$

従って，

$$(x_iy_j)p_{ij}=(x_iy_j)p_iq_j=(x_ip_i)\times(y_jq_j)$$

よって，

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_iy_j)p_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left\{(x_ip_i)\times(y_jq_j)\right\}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m}x_ip_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m}y_jq_j\right)=E(X)E(Y)$$ （証明終）

(2)　分散の公式 $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ を使えばよい。(1)より，

$$E(2XY)=2E(XY)=2E(X)E(Y)$$

従って，

$$V(X+Y)=E((X+Y)^2)-E(X+Y)^2 \quad \text{（分散の公式）}$$

$$=E(X^2+2XY+Y^2)-\{E(X)+E(Y)\}^2$$

$$=E(X^2)+E(2XY)+E(Y^2)-\{E(X)^2+2E(X)E(Y)+E(Y)^2\}$$

$$=E(X^2)-E(X)^2+E(Y^2)-E(Y)^2$$

$$=V(X)+V(Y)$$

(3)　まず，$E(aX\cdot bY)=E(abXY)=ab\,E(X)E(Y)$ なので OK である。

また，

$$V(aX)=a^2V(X), \quad V(-bY)=(-b)^2V(Y)$$

である。さらに，aX と bY も独立であるので，

$$V(aX+bY)=V(aX)+V(bY) = a^2V(X) + b^2V(X)$$
$$V(aX-bY)=V(aX)+V(-bY) = a^2V(X) + b^2V(X)$$

10. 独立試行の場合

● **独立試行の場合**

2 つの試行T_1とT_2が独立で，それらを順に行う（または同時に行う）という試行Tを行ったとき，T_1の結果によって値が定まる確率変数Xと，T_2の結果によって値が定まる確率変数Yは独立になる。

(1)　現実の統計問題においては，確率変数が独立であることを示すために，その独立の定義の条件をチェックすることはほとんどない。理由は，上記が成立するからである。独立試行であれば，確率変数も独立なのである。

(2)　上記の証明は略すが，1 個のサイコロを 2 回投げるという試行Tで理解すればよい。1 回目のサイコロ投げをT_1，2 回目のサイコロ投げをT_2とすれば，T_1とT_2を順に行った試行がTである。そして，T_1とT_2は試行として独立であるから，Tは独立試行である。

試行Tを行い，1 回目に出た目をX，2 回目に出た目をYとすれば，Xの値はT_1の結果によって値が定まっている。同様に，Yの値はT_2の結果によって値が定まっている。このような場合，XとYが確率変数として独立であることは，独立の条件をチェックしなくも自明になるのである。

11. n 個の独立な確率変数

● **定義**

n 個の確率変数X_1，X_2，$\cdots$，X_nについて，各X_iのとる値a_iに対して，

$$P(X_1=a_1,\ X_2=a_2,\ \cdots\cdots,\ X_n=a_n)$$
$$= P(X_1=a_1)\,P(X_2=a_2)\ \cdots\cdots\ P(X_n=a_n)$$

が常に成立するとき，X_1，X_2，$\cdots$，X_nは（互いに）独立であるという。

試行Tに対して，n 個の確率変数X_1，X_2，$\cdots$，X_nが考える。このとき，X_iのとる値a_iに対して，

$$X_1 = a_1 \text{ かつ } X_2 = a_2 \text{ かつ } \cdots \text{ かつ } X_n = a_n$$

となる事象の確率を$P(X_1=a_1,\ X_2=a_2,\ \cdots,\ X_n=a_n)$で表す。そして，

$$P(X_1=a_1,\ X_2=a_2,\ \cdots,\ X_n=a_n) = P(X_1=a_1)\times P(X_2=a_2)\times\cdots\times P(X_n=a_n)$$

が常に成立するとき，X_1，X_2，$\cdots$，X_nは独立であるという。

2 個の確率変数の場合と同様である。$X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立であるとは，これらが無関係な変数であると直感的に理解してよい。次の独立試行は，サイコロ投げで理解すればよい。

● **独立試行の場合**

n 個の試行 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ が互いに独立であるとする。「$T_1, T_2, \cdots, T_n$ を順に行う試行」または「$T_1, T_2, \cdots, T_n$ を同時に行う試行」を T とする。試行 T を行ったとき，T_i の結果によって値が定まる確率変数を X_i （$1 \leq i \leq n$）とすれば，次が成り立つ。

(1) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立である。

(2) 試行 T における X_i の確率分布は，X_i を T_i における確率変数と見なしたときの確率分布に等しい。

確率変数が独立の場合は，和の分散が綺麗に展開できる。

● **定理（n 個の確率変数の和の分散）**

n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立ならば，以下が成り立つ。

(1) $E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$

(2) $V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$

すなわち，$V(\sum_i X_i) = \sum_i V(X_i)$

(3) 任意の定数 a_i に対して

$$V(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n) = a_1{}^2 V(X_1) + a_2{}^2 V(X_2) + \cdots + a_n{}^2 V(X_n)$$

すなわち，$V(\sum_i a_i X_i) = \sum_i a_i{}^2 V(X_i)$

■ **例**

1 個のサイコロを n 回投げるという試行 T を考える。このとき，i 回目に出た目の数を X_i で表せば，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立である。

（解説）

n 回のサイコロ投げは独立試行なので，各回の試行結果は互いに影響を与えない。従って，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立であることは，独立の条件をチェックしなくても自明である。

あえて確認すれば，どの X_i についても，<u>T における</u> X_i の確率分布は次のようになる。

X_i	1	2	3	4	5	6	計
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とすれば，T の標本空間は，Ω の n 個の直積

$$\Omega \times \Omega \times \cdots\cdots \times \Omega$$

である。従って，標本点の個数は，$6 \times 6 \times \cdots \times 6 = 6^n$ である。つまり，起こり得るすべての場合の数は，6^n 通りである。

従って，例えば，すべての回に 1 の目が出る標本点は，（1，1，……，1）のみであるから，

$$P(X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ \cdots,\ X_n = 1) = \frac{1}{6^n}$$

一方，$P(X_i = 1) = 1/6$（$i = 1, 2, \cdots, n$）であるから，

$$P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \times \cdots \times P(X_n = 1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \cdots\cdots \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6^n}$$

他の場合も同様であるから，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立になる。