4.　確率の復習

1.　標本空間と事象

(1)　同じ条件のもとで繰り返し行うことができ，結果が偶然であるような実験・観測を試行という。ここでの「結果」とは，考察の対象にしている結果である。サイコロ投げにおいて，出る目を考察の対象にすれば，出た目が結果である。あるいは，ある定点とサイコロが止まった地点との距離を考察の対象にすれば，「距離 50 ㎝」などが結果である。

(2)　試行 T において，起こり得る個々の結果を T の「標本点」，すべての標本点からなる集合を T の「標本空間」という。以下，標本空間を Ω（オメガ），Ω の要素（すなわち標本点）を，小文字の ω（オメガ）で表す。1 個のサイコロを投げて，出る目を考察の対象にすれば，6 個の標本点 1，2，3，4，5，6 があり，標本空間は $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ である。

(3)　1 つの試行を考えれば，その標本空間が定まる。別の試行を考えれば，その標本空間が定まる。標本空間は，試行によって定まる集合である。

(4)　標本空間 Ω の部分集合を「事象」という。A を 1 つの事象とする。試行の結果が A に含まれるとき，「A が起こる」という。すなわち，試行を行い，その結果（標本点）ω について，$\omega \in A$ ならば「A が起こる」，$\omega \notin A$ ならば「A が起こらない」という。「事象 A が起こる場合」とは，A に含まれる標本点を指し，A が起こる場合の数（かず）とは，A に含まれる標本点の個数を意味する。従って，A が起こる場合の数とは，集合 A の要素の個数のことである。

(5)　高校数学では，「試行の結果として起こる事柄（ことがら）」を事象というが，どのような事柄も標本空間の部分集合で表現できる。

(6)　Ω や空集合 ϕ は，Ω の部分集合であるから，それらは事象である。Ω を「全事象」，ϕ（ファイ）を「空事象」という。試行を行うと，その結果 ω について，$\omega \in \Omega$ は必ず成立するので，全事象 Ω は必ず起こる事象である。また，常に $\omega \notin \phi$ であるから，空事象 ϕ は決して起こらない事象である。

(7)　1 つの標本点からなる事象を「根元事象」という。例えば，標本空間が $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ であれば，$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ が 3 つの標本点，$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}$ が 3 つの根元事象である。（ただし，標本点と根元事象を同一視することもある。）

(8)　標本空間 Ω は集合であるから，Ω の任意の部分集合 A, B に対して，次の集合演算を考えることができる。

①　A と B の和集合　$A \cup B = \{x \mid x \in A$ または $x \in B\}$

②　A と B の共通部分（積集合）　$A \cap B = \{x \mid x \in A$ かつ $x \in B\}$

③　A の（Ω における）補集合　$\overline{A} = \{x \mid x \in \Omega$ かつ $x \notin A\}$

集合演算から得られたこれらの事象を，次のように呼ぶ。

① A と B の和事象　$A \cup B$　（A または B が起こる事象）
② A と B の積事象　$A \cap B$　（A と B がともに起こる事象）
③ A の余事象　$\overline{A}$　（A が起こらない事象）

(9)　Ω の部分集合 $A,\ B$ について，$A \cap B = \phi$ であるとき「A, B は交わらない」「A, B は互いに素」，$A \cap B \neq \phi$ であるとき「A, B は交わる」という。

(10)　同様に，事象 $A,\ B$ について，$A \cap B = \phi$ であるとき「A と B は互いに排反である」「A と B は排反事象である」という。<u>これは，A と B が同時に起こらないことを意味する</u>。

(11)　任意の事象 A に対して，$A \cup \overline{A} = \Omega$，$A \cap \overline{A} = \phi$ が成立する。従って，A とその余事象 $\overline{A}$ は，互いに排反である。

(12)　n 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ について，どの 2 つの事象も互いに排反であるとき，すなわち，$i \neq j$ なる任意の $i,\ j$ について $A_i \cap A_j = \phi$ であるとき，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ は互いに排反であるという。

(13)　n 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ について，次が成立するが，逆は成立しない。

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ は互いに排反} \quad \Longrightarrow \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots\cdots \cap A_n = \phi$$

(14)　標本空間が無限集合になることもあるが，現実に扱う標本空間は有限集合の場合が多い。また，有限集合の場合の議論を理解するのが基本である。

■ 例

1 個のサイコロを投げるという試行を考える。出る目の数に着目し，「i の目が出る」という結果を「ω_i」で表せば，標本空間は

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6 \}$$

となる。また，「i の目が出る」という結果を「i」で表せば，標本空間は

$$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

となる。

標本点は，どのように表現してもよい。「i の目が出る」という結果（標本点）を，「ω_i」で表しても「i」で表してもよい。標本点の表現方法には決まりはなく，自由である。

このサイコロ投げに対して，標本空間を $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ とする。このとき

(1)　標本点は 1, 2, 3, 4, 5, 6，根元事象は $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ である。

(2)　偶数の目が出る事象 A とは，Ω の部分集合 $A = \{2, 4, 6\}$ のことである。

(3)　A を偶数の目が出る事象，B を 3 の倍数の目が出る事象とすれば，

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{3, 6\}$$

① AとBの和事象 $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$（偶数または3の倍数の目が出る事象）

② AとBの積事象 $A \cap B = \{6\}$（偶数かつ3の倍数の目が出る事象）

③ Aの余事象 $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$（偶数の目が出ない事象）

(4) $A = \{1\}$，$B = \{2, 3\}$，$C = \{4, 5\}$とおくと，$A \cap B = \phi$であるから，AとBは互いに排反である。同様に，BとCは互いに排反，CとAは互いに排反である。すなわち，A, B, Cのどの2つも交わらないので，A, B, Cは互いに排反である。

(5) $A = \{1\}$，$B = \{2, 3\}$，$C = \{1, 5\}$とおくと，$A \cap B = \phi$より，$A \cap B \cap C = \phi$である。しかし，$C \cap A \neq \phi$ であるから，A, B, Cは互いに排反ではない。

2. 数学的確率

(1) 試行Tの標本空間Ωにおいて，どの根元事象も同様に確からしいとき，事象Aの起こる確率$P(A)$を

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{事象}A\text{の起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$

で定義する。$n(A)$と$n(\Omega)$は，それぞれAとΩに含まれる要素の個数である。この$P(A)$を事象Aの数学的確率（または単に確率）という。

(2) 確率$P(A)$は，事象Aが起こる場合の数の全体の場合の数に対する割合のことである。また，確率を計算するときは，どの試行のもとでの確率なのかに十分注意すること。試行が異なれば，標本空間が違ってくるからである。

(3) 「どの根元事象も同様に確からしい」とは，試行を行ったとき，どの根元事象が起こることも同じ程度に期待できるという意味である。ただし，この説明は直感的に理解できるが，厳密な定義ではない。この定義の曖昧さを排除するために，公理的な確率の定義もある。

(4) 確率の問題を解く際には，「同様に確からしい」という大前提を満たすために，すべてのものは区別して考える。

(5) 数学的確率$P(A)$は，単に集合の要素の個数で定義しているので，以下が成立することは自明である。

① 確率の値の範囲：任意の事象Aに対して $0 \leq P(A) \leq 1$

② 全事象Ωの確率：$P(\Omega) = 1$

③ 空事象ϕの確率：$P(\phi) = 0$

④ 確率の単調性：$A \subseteq B$ ならば $P(A) \leq P(B)$

⑤ 一般の加法定理：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

⑥ 排反事象の確率の加法性：

AとBが互いに排反ならば $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

⑦ 余事象の確率：$P(\overline{A}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$

⑧　排反事象の加法定理：n 個の事象 A_1, A_2, $\cdots$, A_n が互いに排反ならば

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

(6)　以下では，数学的確率のみを扱うので，標本空間 Ω においては，どの根元事象も同様に確からしいとする。

■　例

次の試行 T を考え，出る目に着目する。

試行 T　$\cdots$　1 個のサイコロを 2 回投げる

(1)　試行 T の標本空間を求めよ。

(2)　2 回目に 1 の目が出る確率を求めよ。

（説明）

(1)　試行 T の結果（標本点）は，次のように組で表現できる。

（1 回目に出た目の数，2 回目に出た目の数）

従って，$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とおくと，試行 T の標本空間は，Ω と Ω の直積

$$\Omega \times \Omega$$

になる。

(2)　2 回目に 1 の目が出る事象は，1 回目にはどの目が出てもよいので，直積 $\Omega \times \{1\}$ で表現できる。

$$\Omega \times \{1\} = \{(1,1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$$

従って，2 回目に 1 の目が出る確率は

$$P(\Omega \times \{1\}) = \frac{n(\Omega \times \{1\})}{n(\Omega \times \Omega)} = \frac{n(\Omega) \times n(\{1\})}{n(\Omega) \times n(\Omega)} = \frac{n(\{1\})}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

高校数学では，次のように解答するだろう。1 個のサイコロを 2 回投げたとき，目の出方は $6 \times 6 = 36$ 通りで，2 回目に 1 の目が出る場合の数は $6 \times 1 = 6$ 通り。

従って，2 回目に 1 の目が出る確率は

$$\frac{6 \times 1}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

このように考えてもよい。いずれにせよ，2 回目に 1 の目が出る確率は，1 個のサイコロを 1 回投げたときに 1 の目が出る確率に等しい。