1.　集合

1. 集合

集合は，数学・論理学・情報科学における基本概念である。

集合（set）とは，範囲の明確な“ものの集まり”のことである。例えば，次の①～④は，いずれも集合になる。

① 5より小さい正の整数全体の集まり
② 自然数全体の集まり
③ a，b，c という3つの文字の集まり
④ $x^2 + y^2 < 1$ をみたす平面上の点 (x, y) 全体の集まり

これらの例のように，集合を構成する“もの”には，数，文字，点など，いろいろなものがある。

「範囲の明確な」とは，どんな“もの”をとってきても，それがその集まりの中にあるかないかが客観的に判定できるという意味である。例えば，“1980 年生まれの人のすべての集まり”は集合になるが，“背の高い人のすべての集まり”は集合にはならない。身長 175 ㎝の人が，その集まりの中に入るかどうかが客観的に判定できないからである。

集合は，普通 $A, B, C, \cdots$ などの大文字で表す。A が 1 つの集合であるとき，A に入っている“もの”を，A の「要素（element)」または「元（げん)」と呼ぶ。

a が集合 A の要素であることを，記号で

$$a \in A \quad \text{または} \quad A \ni a$$

と書く。このことをまた，a が A に属する（ぞくする)，a は A に含まれる，A は a を含む，などという。

a が集合 A の要素でないことを，記号で

$$a \notin A \quad \text{または} \quad A \not\ni a$$

と書く。これは，$a \in A$ の否定である。

最初にあげた例のうちで，“自然数全体の集合”は無限に多くの要素をもつが，“5 より小さい正の整数全体の集合”は，1，2，3，4 という 4 つの要素しかもたない。一般に，無限に多くの要素をもつ集合を「無限集合」，有限個の要素しかもたない集合を「有限集合」と呼ぶ。

2. 集合の外延的記法

集合の表し方には，「外延的記法」と「内包的記法」の 2 通りの方法がある。

一般に，要素 $a, b, c, \cdots$ から成る集合を

$$\{a, b, c, \cdots\}$$

で表す。このような表し方を，集合の外延的記法（がいえんてききほう）という。これは，要素を具体的に書き並べて集合を表す方法である。要素を書き表す順番は，無関係である。

外延的記法では，3 つの文字 p, q, r から成る集合は $\{p, q, r\}$，5 より小さい正の整数全体

の集合は $\{1, 2, 3, 4\}$，ただ 1 つのもの a から成る集合は $\{a\}$，自然数全体の集合は

$$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

と表される。

3. 集合の内包的記法

ものを x に関する条件（性質） C を与えて，条件 C をみたすような x 全体の集合を

$$\{ x \mid C \}$$

で表すことがある。このような表し方を，集合の内包的記法（ないほうてききほう）という。

例えば，

$$\{ x \mid x \text{ は自然数である} \}$$

という内包的記法では，条件 C は「x は自然数である」であり，この集合は， C をみたすすべての x の集まりを意味する。よって，この集合は，自然数全体の集合のことになる。

上記の集合では，文字は x である必要はなく，別な文字を使ってもよい。例えば，

$$\{ a \mid a \text{ は自然数である} \}$$

などと書いてもよい。

また， $x^2 = 4$ であり，かつ， $x > 0$ であるような x 全体の集合は，

$$\{ x \mid x^2 = 4 \text{ かつ } x > 0 \}, \quad \{ x \mid x^2 = 4, x > 0 \}$$

などと表す。後者の表現において，条件の中のコンマ（,）は「かつ（AND)」の意味である。

$x^2 = 4$ と $x > 0$ の両方をみたす x は $x = 2$ のみであるから，上記の集合は，1 つの要素から成る集合 $\{ 2 \}$ にほかならない。

$x^2 = 4$ または $x > 0$ であるような x 全体の集合は，

$$\{ x \mid x^2 = 4 \text{ または } x > 0 \}$$

と書く。

4. 空集合

内包的記法 $\{ x \mid C \}$ では，条件 C をみたすような x が 1 つも存在しないこともあり得る。

例えば， $x^2 + 1 = 0$ かつ $x > 0$ であるような数 x は存在しないので，

$$\{ x \mid x^2 + 1 = 0, x > 0 \}$$

には 1 つも要素がない。よって，集合の定義からいえば，これは集合ではない。

しかし，$\{ x \mid C \}$ を常に集合として取り扱った方が都合が良いので，“要素を全く含まない集合”というものを考え，このようなものも集合の仲間に入れ，それを空集合（くうしゅうごう）と呼ぶ。

空集合は， ϕ （ファイ）という記号で表す。これを用いれば，次が成立する。

$$\{\, x \mid x^2 + 1 = 0,\ x > 0 \,\} = \phi$$

空集合は，有限集合と考える。

5. 集合の包含関係

集合 A, B において， A のどの要素も B の要素であるとき，言い換えれば，任意のもの x について

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

が成り立つとき， A は B の部分集合であるといい，

$$A \subseteq B \quad \text{または} \quad B \supseteq A$$

と書く。このことをまた， A は B に含まれる， B は A を含む，などという。

上記において“⇒”は“ならば”と読む。「$x \in A \Rightarrow x \in B$」は，

$$x \in A \text{ ならば必ず } x \in B \text{ となる}$$

という意味である。

A が B の部分集合でないとき，すなわち， A が B に含まれないとき，

$$A \nsubseteq B \quad \text{または} \quad B \nsupseteq A$$

と書く。

集合 A, B が全く同じ要素からなるとき，すなわち， A のどの要素も B の要素であり， B のどの要素も A の要素であるとき， A と B は等しいといい，

$$A = B$$

と書く。また， A と B が等しくないときは， $A \neq B$ と書く。

定義から， $A = B$ とは

$$A \subseteq B,\ B \subseteq A$$

の両方が成立することである。従って，一般に， $A = B$ であることを示すには， $A \subseteq B$ と $B \subseteq A$ の両方の成立を示せばよい。

$A \subseteq B$ のとき， $A \neq B$ の場合もある。 $A \subseteq B$ であり，かつ $A \neq B$ のとき， A は B の「真部分集合」であるという。

空集合 ϕ については，任意の集合の部分集合であると約束する。つまり，どのような集合 A についても，

$$\phi \subseteq A$$

であると約束する。従って，どのような集合についても，その部分集合の 1 つは空集合である。

集合について，含まれる・含まれないの関係を，集合の包含関係という。包含関係については，以下が常に成立する。

(1) $A \subseteq A$

(2) $A \subseteq B,\ B \subseteq A \ \Rightarrow\ A = B$

(3) $A \subseteq B,\ B \subseteq C \ \Rightarrow\ A \subseteq C$

2.　集合演算

1. 集合演算

1 つまたは複数の集合から，新たに 1 つの集合を作ることを「集合演算（えんざん）」という。基本的な集合演算には，「和集合」「共通部分（積集合）」「差集合」がある。

2. 和集合と共通部分

集合 A, B について， A の要素と B の要素を全部よせ集めて得られる集合を， A と B の和集合（わしゅうごう）といい，

$$A \cup B$$

で表す。これを， A と B の結び（むすび）ともいう。

また， A と B の両方に共通な要素全体の集合を， A と B の共通部分，または， A と B の積集合（せきしゅうごう）といい，

$$A \cap B$$

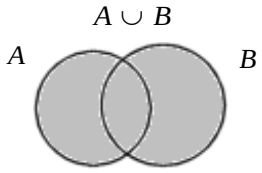
で表す。これを， A と B の交わり（まじわり）ともいう。

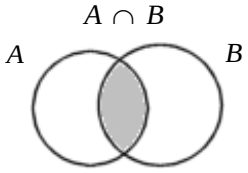
内包的記法で書けば

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ または } x \in B \,\}$$
$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \,\}$$

である。

理解しやすいように，集合をベン図（Venn 図）で表すことがある。ベン図とは，複数の集合の関係を図式化したものである。和集合，共通部分をベン図で表せば，次のようになる。





例えば， $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$， $B = \{3, 5, 7, 9\}$ であるとき，

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\},\quad A \cap B = \{3, 5\}$$

となる。

一般に， $A \cap B \neq \phi$ のとき「A と B は交わる」という。 $A \cap B = \phi$ のときは，「A と B は交わらない」または「A と B は互いに素（たがいにそ）である」という。

例えば， $A = \{1, 2\}$， $B = \{2, 3\}$， $C = \{3, 4\}$ であるとき， $A \cap B \neq \phi$， $A \cap C = \phi$ であるから， A と B は交わり， A と C は互いに素である。

次は，和集合と共通部分に関する基本的な法則（公式）であるが，論理学における推論でも使用される。

(1)　$A \subseteq A \cup B$，$B \subseteq A \cup B$

(2)　$A \subseteq C$，$B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

(3)　$A \supseteq A \cap B$，$B \supseteq A \cap B$

(4)　$A \supseteq C$，$B \supseteq C \Rightarrow A \cap B \supseteq C$

3. 差集合

集合 A, B について，A の要素であって B の要素でないもの全体のつくる集合を，A と B の差集合（さしゅうごう）といい，

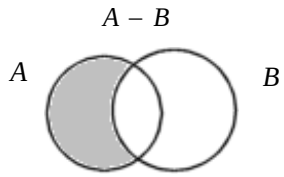
$$A - B$$

で表す。くわしく言うときは，A から B を引いた差集合という。

定義により

$$A - B = \{\, x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B \,\}$$

である。



例えば，$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{3, 5, 7, 9\}$ ならば

$$A - B = \{1, 2, 4\}$$

である。

4. 補集合と全体集合

集合 A, U について，$A \subseteq U$ であるとき，U から A を引いた差集合 $U - A$ を，U に対する A の補集合（ほしゅうごう）といい，

$$\overline{A} \quad \text{または} \quad A^c$$

で表す。$\overline{A}$ は“A のバー”と読む。

この定義により

$$\overline{A} = U - A = \{\, x \mid x \in U \text{ かつ } x \notin A \,\}$$

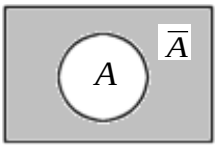
である。

例えば，$A = \{1, 2\}$，$U = \{1, 2, 3, 4\}$ ならば

$$\overline{A} = \{\, 3,\ 4 \,\}$$

である。

我々が具体的に集合を考察するとき，1 つの集合 U とその部分集合 A，B，C, … のみを考察の対象にすることがある。このよう場合，その定まった集合 U のことを，その考察における「全体集合」という。また，U に対する A の補集合を，単に A の補集合という。



上の図から，次が成立することがわかるだろう。

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \phi$$

また，A, B が全体集合U の部分集合であるとき，

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

が成立する。

5. 3 つ以上の集合

集合 A, B, C に対して，“A と B の和集合 $A \cup B$”と C の和集合は，

$$(A \cup B) \cup C$$

のように表される。数の演算と同様に，集合演算においても，どの演算から行うかを明示するためにカッコをつけて表現する。

しかし，上記の集合は，A と“B と C の和集合”の和集合に明らかに等しい。すなわち

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

が成立している。そこで，通常はカッコを省略して，この集合を $A \cup B \cup C$ と書く。これは，A, B, C の要素を全部よせ集めて得られる集合にほかならない。

同様に，

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

が成立するので，この集合を $A \cap B \cap C$ と書く。

ところが，$(A \cup B) \cap C$ と $A \cup (B \cap C)$ は一般に異なるので，

$$A \cup B \cap C$$

のように書いてはいけない。

つまり，$\cup$ のみの演算，あるいは，$\cap$ のみの演算のときは，カッコを省略してもよいが，$\cup$ と $\cap$ の両方が入る演算では，カッコは省略できないということである。

一般に，n 個の集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対しても $\cup$ のみの演算を考えれば，演算の順番に関係なく，得られる集合は常に同じである。この集合を

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

で表し，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ の和集合という。これは，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ の要素を全部よせ集めてできる集合である。

同様に，$\cap$ のみの演算では，

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

と書き，これを A_1 , A_2 , … , A_n の共通部分（積集合）という。これは， A_1 , A_2 , … , A_n のすべてに共通な要素全体からなる集合である。

6. 集合演算の法則

集合演算にはいろいろな法則があるが，以下が基本である。それらの成立はベン図で確認できる。（最後のド・モルガンの法則は重要である。）

(1) べき等法則　$A \cup A = A$，$A \cap A = A$

(2) 交換法則　$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$

(3) 吸収法則　$A \cup (A \cap B) = A$，$A \cap (A \cup B) = A$

(4) 結合法則　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(5) 分配法則　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

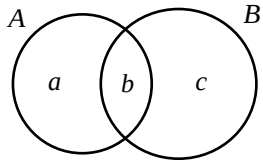
(6) 復元法則　$\overline{\overline{A}} = A$

(7) ド・モルガンの法則　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

7. 集合の要素の個数

一般に，有限集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す。空集合 ϕ は要素をもたないので，$n(\phi) = 0$ となる。以下，有限集合を考える。

次の図のように，$n(A) = a + b$，$n(A \cap B) = b$，$n(B) = b + c$ とおく。



このとき，$n(A \cup B) = a + b + c$ であるから

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

が成立することがわかる。

A と B が交わらないとき，すなわち $A \cap B = \phi$ であるときは，

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

が成立する。

A が全体集合 U の部分集合のとき

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$$

が成立する。これはベン図から明らかであるが，$A \cup \overline{A} = U$，$A \cap \overline{A} = \phi$ であるから，

$$n(U) = n(A \cup \overline{A}) = n(A) + n(\overline{A})$$

である。よって，上記の等式が得られる。

8. 直積集合

集合 A, B について， A の要素 a と B の要素 b との組 (a, b) 全体のつくる集合を， A と B の直積集合（ちょくせきしゅうごう）といい，

$$A \times B$$

で表す。これを， A と B の直積ともいう。

これは，あくまでも組 (a, b) から成る集合であり，

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

である。要素 (a, b) について， a を (a, b) の第 1 成分， b を (a, b) の第 2 成分という。第 1 成分は A の要素，第 2 成分は B の要素である。

$A \times B$ の 2 つの要素 (a, b)， (c, d) について， $(a, b) = (c, d)$ とは

$$a = c \text{ かつ } b = d$$

が成立することである。従って， $a \neq c$ または $b \neq d$ であれば， $(a, b) \neq (c, d)$ である。

例えば， $A = \{1, 2\}$， $B = \{p, q\}$ であるとき， $A \times B$ は，次の 4 つの要素からなる集合である。

$$(1, p)，\ (1, q)，\ (2, p)，\ (2, q)$$

$A = \{1, 2\}$， $B = \{p, q, r\}$ であれば， $A \times B$ は次の 6 個の要素からなる。

$$(1, p)，\ (1, q)，\ (1, r)，\ (2, p)，\ (2, q)，\ (2, r)$$

一般に， $A \times B$ の要素の個数については

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

が成立する。

A と A 自身の直積 $A \times A$ も考えられる。この場合は

$$A \times A = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in A \}$$

である。

例えば， $A = \{1, 2\}$ であれば， $A \times A$ は，次の 4 つの組から成る集合である。

$$(1, 1)，\ (1, 2)，\ (2, 1)，\ (2, 2)$$

ここで，組 $(1, 2)$ と組 $(2, 1)$ は異なることに注意しよう。

9. n 個の集合の直積集合

前述で 2 つの集合の直積を説明したが，一般に， n 個の集合に対して，それらの直積を考えることができる。

n 個の集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対して， A_1 の要素 a_1， A_2 の要素 a_2， …， A_n の要素 a_n のこの順序での組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を考え，このような組全体のつくる集合を $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$

で表し，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ の直積集合または直積という。

すなわち

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n \}$$

である。

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ の 2 つの要素 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ について，それらが等しい，すなわち

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

であるとは，

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \cdots,\ a_n = b_n$$

がすべて成立することである。

組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ において，a_1 を第 1 成分，a_2 を第 2 成分，…，a_n を第 n 成分という。従って，2 つの組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ が等しいとは，両者の対応する各成分がみな等しいということである。

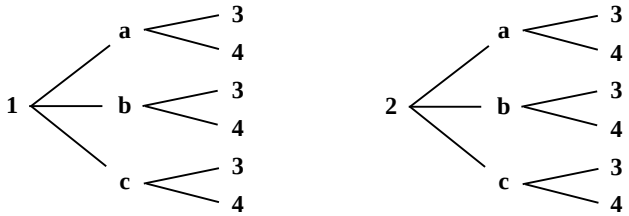
具体例で考えてみよう。いま

$$A_1 = \{ 1, 2 \},\ A_2 = \{ a, b, c \},\ A_3 = \{ 3, 4 \}$$

とすると，直積 $A_1 \times A_2 \times A_3$ は，次の 12 個の組からなる集合である。

$$(1, a, 3),\ (1, a, 4),\ (1, b, 3),\ (1, b, 4),\ (1, c, 3),\ (1, c, 4),$$
$$(2, a, 3),\ (2, a, 4),\ (2, b, 3),\ (2, b, 4),\ (2, c, 3),\ (2, c, 4)$$

このことは，次の樹形図（じゅけいず）からでも確認できる。（樹形図とは，下図のように，順に次々に分岐点で枝分かれするような図であり，順列や組合せの数，場合の数などを求める際によく用いる。）



ここで，第 1 成分は1と 2 の 2 通り，第 2 成分は a, b, c の 3 通り，第 3 成分は3と 4 の 2 通りであるから，組（○，○，○）は全部で $2 \times 3 \times 2 = 12$ 通りある。従って

$$n(A_1 \times A_2 \times A_3) = n(A_1) \times n(A_2) \times n(A_3)$$

である。

一般に，n 個の集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対して

$$n(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = n(A_1) \times n(A_2) \times \cdots \times n(A_n)$$

が成立する。