2. 論理

1. 命題

論理学の世界では，主張している内容が正しいか，正しくないかが客観的に判定できるような文章や式を「命題」と呼ぶ。式とは，等式や不等式のことである。

次は，いずれも命題である。

- 4 は 3 より大きい
- 10 + 20 = 50
- 20 < 30

命題が正しいとき，「命題は真（しん）である」または「命題は成立する」という。命題が正しくないとき，「命題は偽（ぎ）である」または「命題は成立しない」という。真を True，偽を False ともいう。

与えられた命題は，真または偽のいずれかであり，真かつ偽であるような命題は存在しない。命題は，真でなければ偽であり，偽でなければ真である。

命題は，真偽の対象になるような明確な文章や式でなければならない。「4 は 3 より大きい」は命題であるが，「数学は英語より大きい」という意味不明な文章は命題ではない。「またあした，バイバイ」は明確な文章だが，真偽の対象になり得ないので命題ではない。

2. 真理値（論理値）

命題を A，B，C，… などの文字で表す。命題が真であることを 1，偽であることを 0 で表す。真偽を表す 1 と 0 のことを，「真理値（しんりち）」または「論理値（ろんりち）」と呼ぶ。

また，命題が真であることを T，偽であることを F で表すこともあるが，その場合は，T と F が真理値になる。

命題 A が真であるとき，「A の真理値は 1」または簡単に「A は 1」などという。同様に，命題 A が偽であるとき，「A の真理値は 0」または「A は 0」などという。いかなる命題についても，その真理値は 1 または 0 のいずれかである。

3. 論理演算

1 つまたは複数の命題から，新たに 1 つの命題を作ることがある。作られた 1 つの命題を「合成命題」または「複合命題」と呼び，合成命題を作るための演算を「論理演算」という。

例えば，「10 > 20」と「2 は偶数である」という 2 つの命題から，「10 > 20，かつ，2 は偶数である」という合成命題を作ることができる。ここでは，「かつ」が論理演算になる。

一般に，論理演算は「論理記号」を用いて表現される。論理記号を使って表現した合成命題を「論理式」とも呼ぶ。

最も基本的な論理演算は，論理和，論理積，論理否定の 3 つである。

論理演算	論理式	論理式の読み方
論理和（OR 演算）	$A+B$，A OR B，$A \vee B$	A または B
論理積（AND 演算）	$A \cdot B$，A AND B，$A \wedge B$	A かつ B
論理否定（NOT 演算）	$\overline{A}$，NOT A	A でない

論理学の世界では，通常，論理和・論理積を表す論理記号として「$\vee$」や「$\wedge$」を使用し，論理和は「$A \vee B$」，論理積は「$A \wedge B$」と書く。ただし，コンピュータの世界では「$A + B$」「$A \cdot B$」と書くことが多いので，以下ではこれらの記号で説明する。

また，「$A+B$」を「A OR B」と書く場合もある。以下では，OR，AND，NOT による表現も書くことにする。

4. 基本的な論理演算の定義

以下，A, B を命題とする。基本的な論理演算は，以下の 4 つである。

● 論理和（OR 演算）

「A または B」という命題を，「A と B の論理和」または「A と B の OR 演算」と呼び，「$A + B$」 または「A OR B」で表す。論理和 $A + B$ は，A と B の少なくとも一方が成立することを主張する命題であり，この真偽は次のように定義される。

A	B	$A + B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

（$A + B$ の真偽の定義）

A が真または B が真のときは真，それ以外の場合は偽

A と B の真偽の組合せは 4 通りあり，それぞれの場合において $A + B$ の真理値を求めていくと，上の表が得られる。これを，$A + B$ の真理値表という。

● 論理積（AND 演算）

「A かつ B」という命題を，「A と B の論理積」または「A と B の AND 演算」といい，「$A \cdot B$」 または「A AND B」で表す。論理積 $A \cdot B$ は，A と B の両方が成立することを主張する命題であり，この真偽は次のように定義される。

A	B	$A \cdot B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

（$A \cdot B$ の真偽の定義）

A が真かつ B が真のときは真，それ以外の場合は偽

● **論理否定（NOT 演算）**

「Aでない」という命題を,「Aの論理否定」,「Aの否定」,「Aの NOT 演算」などと呼び,「$\overline{A}$」または「NOT A」で表す。論理否定 $\overline{A}$ は，Aでないことを主張する命題であり，この真偽は次のように定義される。

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

（$\overline{A}$ の真偽の定義）

Aが真ならば偽，Aが偽ならば真

● **排他的論理和（XOR 演算，EOR 演算）**

「AとBの一方のみが成立する」という命題を，AとBの排他的（はいたてき）論理和と呼び,「$A \oplus B$」または「A XOR B」で表す。$A \oplus B$は,「AでありBでない」または「BでありAでない」を主張する命題であり，その真偽は次のように定義される。

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

（$A \oplus B$ の真偽の定義）

A, Bの一方のみが真のときは真，それ以外の場合は偽

排他的論理和は，XOR 演算，EOR 演算などともいう。

5. 合成命題の真理値表の求め方

合成命題の真理値表を求めるときは，それを構成する各命題の真理値を順番に求めていけばよい。例えば, 合成命題 $(\overline{A} + B) \cdot B$ の真理値表を求める場合, 次のように, $\overline{A}$, $\overline{A} + B$, $(\overline{A} + B) \cdot B$ の真理値を順番に求めていけばよい。

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} + B$	$(\overline{A} + B) \cdot B$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	0

6. 命題の相等

2 つの命題 A, B について，AとBの真理値が常に等しいとき，AとBは等しい，または，AとBは同値であるといい，$A = B$と書く。

従って，2 つの命題（論理式）が等しいかどうかを調べるには，それらの真理値表を求めてみればよい。例えば，次の真理値表により，$\overline{\overline{A}} = A$であることがわかる。

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
1	0	1
0	1	0

7. 論理演算と集合演算との関係

全体集合U の部分集合 A, B から

A と B の和集合　$A \cup B = \{ x \mid x \in A$ または $x \in B \}$

A と B の積集合　$A \cap B = \{ x \mid x \in A$ かつ $x \in B \}$

A の補集合　$\overline{A} = \{ x \mid x$ は A の要素でない $\}$

をつくることができた。

これらの集合は，論理演算から作られている。例えば，2 つの命題「$x \in A$」と「$x \in B$」から，論理和「$x \in A$ または $x \in B$」をつくり，この論理和が真であるような“もの x”の全体の集まりが $A \cup B$ になる。

このように，集合演算の ∪（和集合），∩（積集合），$\overline{\ }$（補集合）と，論理演算の ＋（または），・（かつ），$\overline{\ }$（でない）は完全に対応し，論理演算を考えることと，集合演算を考えることは同じである。従って，

論理和 ＝ 和集合，論理積 ＝ 積集合，論理否定 ＝ 補集合

と考えればよい。

例えば，集合 A が与えられたとき，もの x について，$x \in A$ のときは 1，$x \notin A$ のときは 0，と表現してみよう。

このとき，2 つの集合 A, B に対して，x が A に含まれる場合，B に含まれる場合などを考えていけば，それぞれの場合において $A \cup B$ の 1 と 0 の状態は次のようになるだろう。

A	B	$A \cup B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

これはまさに，命題 A, B の論理和の真理値表である。

さらに，集合演算 $(A \cup B) \cap B$ を考えれば，1 と 0 の状態は次のようになる。

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B) \cap B$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	0

ベン図で考えればすぐにわかるが，集合 $(A \cup B) \cap B$ と集合 B は等しい。従って，この 2 つの集合の 1 と 0 の状態は，上記のように当然一致する。（逆に，1 と 0 の状態が等しい 2 つの集合は一致する。）

一方，上記の表は，命題の論理式 $(A+B)\cdot B$ の真理値表に一致する。従って，

集合 A, B に関する等式　$(A \cup B) \cap B = B$

の成立は，

命題 A, B に関する等式　$(A+B)\cdot B = B$

の成立を意味することになる。

以上のように，論理演算は集合演算で考えることができる。また，逆に，集合演算は論理演算で考えることができる。

8. 論理演算の法則

次は，命題の論理演算に関する基本法則である。集合演算の場合と全く同じである。

(1)　べき等法則　$A + A = A$，　$A \cdot A = A$

(2)　交換法則　　$A + B = B + A$，　$A \cdot B = B \cdot A$

(3)　吸収法則　　$A + (A \cdot B) = A$，　$A \cdot (A + B) = A$

(4)　結合法則　　$A + (B + C) = (A + B) + C$，　$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

(5)　分配法則　　$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$，

$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

(6)　復元法則　　$\overline{\overline{A}} = A$

(7)　ド・モルガンの法則　　$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$，　$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

これらの成立は真理値表でも確認できるし，前述のように，A, B を集合と考えてベン図でも確認できる。

例えば，(7)のド・モルガンの法則の成立は，以下の真理値表で確認できる。

○　$\overline{A + B}$　と　$\overline{A} \cdot \overline{B}$ の真理値は一致する

○　$\overline{A \cdot B}$　と　$\overline{A} + \overline{B}$　の真理値は一致する

A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

なお，結合法則より，$A+(B+C)$ と $(A+B)+C$ は同じであるから，カッコをはずして $A+B+C$ と書いてもよい。同様に，$A\cdot B\cdot C$ と書いてもよい。

しかし，「＋（または）」と「・（かつ）」が混在している場合は，カッコを省略することはできない。例えば，$A+(B\cdot C)$ と $(A+B)\cdot C$ とは一般に異なるので，

$$A+B\cdot C$$

と書いてはいけない。

9. 3つ以上の命題の論理和・論理積

命題 A, B, C に対して，論理式 $A+B+C$ と $A\cdot B\cdot C$ の真偽はどのようになるだろうか。真理値表を求めると，次のようになる。

A	B	C	$A+B$	$A+B+C$	$A\cdot B$	$A\cdot B\cdot C$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0

よって，真偽は次のようになる（ベン図からでもわかる）。

- $A+B+C$ の真偽 … A, B, C のいずれかが真のときは真，それ以外の場合は偽
- $A\cdot B\cdot C$ の真偽 … A, B, C のすべてが真のときは真，それ以外の場合は偽

これらは，n 個の命題でも成立する。

一般に，n 個の集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対して，和集合 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，積集合 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ を考えることができたが，n 個の命題 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対しても，論理式

$A_1+A_2+\cdots+A_n$　（$A_1, A_2, \cdots, A_n$ の論理和という）

$A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n$　（$A_1, A_2, \cdots, A_n$ の論理積という）

を考えることができる。これらの真偽は次のようになる。

- $A_1+A_2+\cdots+A_n$ の真偽
  … $A_1, A_2, \cdots, A_n$ のいずれかが真のときは真，それ以外の場合は偽
- $A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n$ の真偽
  … $A_1, A_2, \cdots, A_n$ のすべてが真のときは真，それ以外の場合は偽

10. ド・モルガンの法則

ド・モルガンの法則

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

は，次のことを意味している。

A と B の論理和の否定 ＝ A の否定と B の否定の論理積

A と B の論理積の否定 ＝ A の否定と B の否定の論理和

簡単に書けば，

論理和の否定 ＝ 否定の論理積，　論理積の否定 ＝ 否定の論理和

である。

さらに，「または」と「かつ」で表現すれば

$$\overline{A \text{ または } B} = \overline{A} \text{ かつ } \overline{B}, \quad \overline{A \text{ かつ } B} = \overline{A} \text{ または } \overline{B}$$

となる。（否定をとれば，「または」は「かつ」に，「かつ」は「または」に変わることに注意しよう。）

このようなことは，n 個の命題についても成立する。例えば，3 つの命題 A, B, C に対して，ド・モルガンの法則を繰り返し使うと，次のようになる。

$$\overline{A+B+C} = \overline{(A+B)+C} = \overline{A+B} \cdot \overline{C} = (\overline{A} \cdot \overline{B}) \cdot \overline{C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

$$\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{(A \cdot B) \cdot C} = \overline{A \cdot B} + \overline{C} = (\overline{A} + \overline{B}) + \overline{C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

一般に，n 個の命題 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ についても，以下が成立する。

● 論理和の否定 ＝ 否定の論理積

$$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \cdots \cdot \overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 \text{ または } A_2 \text{ または } \cdots \text{ または } A_n} = \overline{A_1} \text{ かつ } \overline{A_2} \text{ かつ } \cdots \text{ かつ } \overline{A_n}$$

● 論理積の否定 ＝ 否定の論理和

$$\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 \text{ かつ } A_2 \text{ かつ } \cdots \text{ かつ } A_n} = \overline{A_1} \text{ または } \overline{A_2} \text{ または } \cdots \text{ または } \overline{A_n}$$

11. 排他的論理和に関する注意

A と B の排他的論理和 $A \oplus B$ は，一方のみが真なら真，それ以外は偽と定義された。従って，$A \oplus B$ は，A または B のいずれか一方のみの成立を主張する命題であり，言いかえれば

「A であり，かつ，B でない」または「A でない，かつ，B である」

という命題になる。よって，次の等式が成立する。

$$A \oplus B = (A \cdot \overline{B}) + (\overline{A} \cdot B)$$

排他的論理和は，ベン図では $(A-B)\cup(B-A)$ の部分を表す。

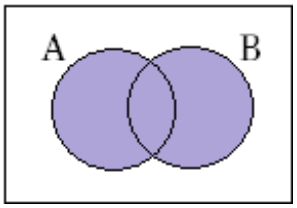
12. まとめ

これまでの論理演算をまとめると，以下のようになる。真理値表とベン図でよく理解しておこう。

① 論理和 $A+B$

A	B	$A+B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A または B

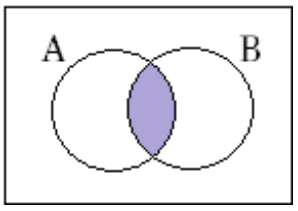


どちらかが 1 のときは 1

② 論理積 $A\cdot B$

A	B	$A\cdot B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A かつ B

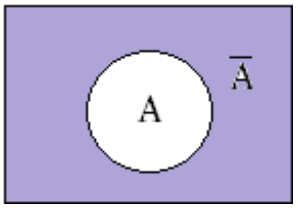


両方 1 なら 1

③ 論理否定 $\overline{A}$

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

A でない

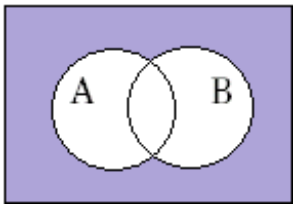


1 なら 0，0 なら 1

④ 論理和の否定 $\overline{A+B}$

A	B	$\overline{A+B}$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

“A または B” の否定



論理和の否定＝否定の論理積

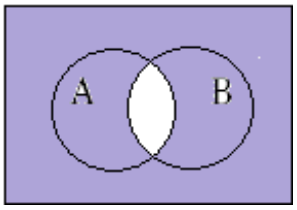
ド・モルガンの法則

$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

⑤ 論理積の否定　$\overline{A \cdot B}$

“AかつB”の否定

A	B	$\overline{A \cdot B}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1



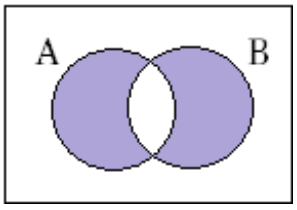
論理積の否定＝否定の論理和

ド・モルガンの法則

$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

⑥ 排他的論理和　$A \oplus B$

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0



一方のみが 1 なら 1

論理演算を数の演算のように表現すれば，次のようになる。（以下は，2 進数の計算ではなく，あくまでも論理演算であることに注意しよう。）

- 論理和

  $1+1=1$，$1+0=1$，$0+1=1$，$0+0=0$

- 論理積

  $1 \cdot 1=1$，$1 \cdot 0=0$，$0 \cdot 1=0$，$0 \cdot 0=0$

- 論理否定

  $\overline{1}=0$，$\overline{0}=1$

- 排他的論理和

  $1 \oplus 1=0$，$1 \oplus 0=1$，$0 \oplus 1=1$，$0 \oplus 0=0$