11.　述語論理

1.　命題論理の限界

命題論理では，命題の内容に立ち入らずにその真偽のみに着目し，命題間の真偽の関係を考察する。そのため，命題論理で扱う最小の単位は「要素命題」である。要素命題とは，真偽を問うことができる最小の文であった。しかし，そのことが命題論理の限界を引き起こす。

例えば，

すべての男性は花子が好きである

という命題は，要素命題である。実際，この文を「すべての男性」「花子が好きである」などに分割すると，それらの語句の真偽を問うことができない。

そこで，次の推論を考えてみる。

（推論）　（前提）すべての男性は花子が好きである。
　　　　　（前提）太郎は男性である。
　　∴　　（結論）太郎は花子が好きである。

この推論は，明らかに正しいだろう。ところが，この推論の妥当性を命題論理で証明することができない。2 つの前提と 1 つの結論は，いずれも要素命題であるから，それぞれ 1 つの命題記号で表現するしかない。よって，この推論式 は

$$A,\ B \quad \therefore\ C$$

の形になるが，A と B をともに 1 と仮定しても，C が 1 になる保証がどこからも得られない。それどころか，要素命題をそのまま記号化したために，C は A と B に無関係な記号になってしまい，C に 0 を割り当てることが可能になる。

従って，推論式は恒真とはいえず，この推論は命題論理では妥当でない，と判定されてしまうのである。

2.　述語論理とは

上記の命題論理の限界を乗り越えたのが，ドイツの数学者・論理学者・哲学者であるフレーゲ（Frege，1848–1925）であった。フレーゲは，述語論理の基本概念を構築し，アリストテレス以来の伝統的論理学を一気に塗り替えた。

述語（じゅつご）論理は，命題の内部に立ち入って推論の正しさを研究する学問である。その名の通り，述語の論理であるが，これは命題論理を土台にして構築される。従って，述語論理は命題論理の拡張である。

3.　「名詞（体言）」の復習

まず，中学校で学習する名詞の意味を簡単に復習しておく。

１．名詞とは

(1)　名詞とは － ものごとの名称を表す単語

　①　名詞とは，ものごとの名称を表す単語であり，体言（たいげん）ともいう。

(2)　名詞の性質 － 自立語で活用がない

　①　名詞は，単独で一つの文節となることができるから，自立語である。

　②　名詞は，助詞「が」や「は」をともなって主語になる。

２．名詞の種類 － 名詞は４種類

(1)　普通名詞

　①　普通名詞は，一般的なものごとの名称を表す単語。

　②　例：犬　さくら　山　机　時計　家　心　運動　時間　知識

(2)　固有名詞

　①　固有名詞は，人名・地名・書名など，ただ１つしかないものの名称を表す単語。

　②　例：聖徳太子　シュバイツァー　東京　太平洋　富士山　論語（ろんご）　法隆寺（ほうりゅうじ）

(3)　数詞

　①　数詞（すうし）は，ものの数・量・順序を表す単語。

　②　例：一つ　三人　五羽　六倍　第九　いくつ　何度

(4)　代名詞

　①　人やものごとの名称をいわないで，直接にその人やものごとを指し示す単語。

　②　例：私　あなた　これ　それ　あれ　どこ　あちら

4.　述語論理における用語

　述語論理では，要素命題を「個体」と「述語」に分割する。個体や述語とは何か。以下，述語論理における基本的な用語や概念をまとめておく。

(1)　述語論理は命題論理の拡張

　述語論理は，命題論理の拡張である。従って，述語論理では，命題論理における「命題」「真理値」「論理記号」「推論」などの概念がそのまま使用される。

(2)　述語論理での論理記号

　命題論理では，～（否定），∧（連言），∨（選言），→（条件文），↔（双条件文）の 5 つの論理記号が登場したが，述語論理では，さらに「∀」と「∃」が論理記号として使用される。「∀」を全称記号，「∃」を存在記号という。

(3)　個体（こたい）

　1 つのものを「個体」と呼ぶ。「太郎は天才である」という命題は，「太郎」という一人の

人物に関する主張であるので，「太郎」は個体である。「犬は足が速い」という命題では，一匹の犬に関する主張ではないので，「犬」は個体ではない。一般に，固有名詞は個体になるが，普通名詞は個体にならない。

(4) 固有名（こゆうめい）

個体を表す名前を「固有名」という。「太郎は天才である」では，「太郎」が固有名である。「東京」は固有名だが，「山」は固有名ではない。

(5) 個体定項（こたいていこう）

命題において，固有名で表現された個体を，「個体定項」または「定項」と呼ぶ。これは，固有名詞に相当する。「太郎は花子が好きだ」という命題では，「太郎」と「花子」が，個体定項である。「犬は動物である」では，「犬」も「動物」も，個体定項にならない。

命題を記号化する場合，個体定項は，小文字 a，b，c …などで表す。

(6) 述語（じゅつご）と述語記号

個体の性質や関係を表す表現を「述語」と呼ぶ。これは，文法上の述語とは異なる。「太郎は天才である」という命題では，「…は天才である」が述語である。「太郎は花子が好きだ」という命題では，「太郎」と「花子」が個体であり，「…は…が好きだ」が述語である。「犬は足が速い」では，「…は足が速い」が述語になるが，普通名詞の「犬」も述語と考える（後述）。

述語は，大文字の F，G，H …などで表す。述語を表す記号 F，G，H … を，述語記号という。「太郎は天才である」では，個体定項の「太郎」を a，述語の「…は天才である」を F とすると，この命題の記号化は，

$$F(a)$$

になる。（$F(a)$ を Fa で表すこともある）

(7) 個体変項（こたいへんこう）

不特定の個体を，「個体変項」または「変項」と呼ぶ。個体変項は，小文字 x，y，z …などで表す。

(8) 命題関数（めいだいかんすう）

命題において，個体定項を個体変項に置き換えた文を，「命題関数」と呼ぶ。要素命題に対する命題関数は，個体変項と述語のみからなる文である。例えば，「x は天才である」は，命題関数である。ここで，「…は天才である」を F とすると，この命題関数は

$$F(x)$$

で記号化できる。

(9) 全称記号（ぜんしょうきごう）（∀）と存在記号（そんざいきごう）（∃）

全称記号（∀）は「すべて」，存在記号（∃）は「ある」を意味する。この「ある」は，

「ある学生は天才だ」における「ある」の意味である。「ある学生は天才だ」は，「少なくとも一人の学生は天才だ」「天才の学生がいる」と同じ意味である。

∀と∃を総称して，限量記号ともいう。

(10) 全称量化子と存在量化子

全称量化子（ぜんしょうりょうかし）と存在量化子（そんざいりょうかし）

個体変項 x の前に全称記号を付けた「$\forall x$」を「全称量化子」（または「普遍量化子」），存在記号を付けた「$\exists x$」を「存在量化子」と呼ぶ。また，これらを総称して「量化子」と呼ぶ。これらは，命題関数において，次を意味する。

○　全称量化子 $\forall x$　…「すべての x について」

○　存在量化子　$\exists x$　…「ある x について」「少なくとも 1 つの x について」

(11) 量化

量化（りょうか）

命題関数において，個体変項に「すべて」や「ある」といった量を与えることを，個体変項を「量化する（quantify）」という。

○　x を量化する：「x は犬である」 ⇒「すべての x は犬である」

○　x を量化する：「x は犬である」 ⇒「ある x は犬である」

(12) 量化命題

量化命題（りょうかめいだい）

全称記号∀や存在記号∃が入った命題を「量化命題」という。

5.　述語論理における命題の記号化

述語論理における命題の記号化の基本を説明するが，ポイントは次の 2 つである。

①　複合命題は，命題論理の場合と同様に，要素命題に分割する。

②　要素命題が主張する内容を，「個体」と「述語」で表現する。
（文法上の主語が「個体」とは限らない。また，文法上の述語が「述語」とは限らない。）

(1)　要素命題：太郎は天才である。

「太郎」は個体定項であり，その個体の性質を表現している「…は天才である」が述語である。そこで，「太郎」を a，「…は天才である」を F として，命題を次のように記号化する。

$$F(a)$$

これは，「a は天才である」という意味だが，「a は F である」と表現してもよい。

(2)　要素命題：太郎は花子が好きである。

「太郎」と「花子」が個体定項であり，これらの関係を示す「…は…が好きである」が述語である。「太郎」を a，「花子」を b，「… は … が好きである」を F として，次のように記号化する。

$$F(a, b)$$

これは，「a は b が好きである」という意味だが，「a と b は F である」「a と b には F という関係がある」と表現してもよい。なお， $F(a,b)$ と $F(b,a)$ は，通常意味が異なる。

(3)　命題関数：x は y が好きである。

x と y は，個体変項である。「…は…が好きである」を F として，次のように記号化する。

$$F(x,y)$$

x と y はどちらも個体ではあるが，不特定の個体であるため，命題関数の真偽は確定しない。 x と y に固有名を代入すると，真偽が確定する。例えば，「太郎」を a ，「花子」を b とし， x に a ， y に b を代入すると， $F(a,b)$ は命題になり真偽が確定する。

(4)　要素命題の否定：太郎は天才ではない。

これは，「太郎は天才である」の否定命題である。「太郎」を a ，「…は天才である」を F とすると，次のように記号化される。

$$\sim F(a)$$

これは，「a は天才ではない」という意味だが，「a は F ではない」と表現してよい。

(5)　複合命題：花子または太郎が出席する。

これは要素命題ではないので，「（花子が出席する）または（太郎が出席する）」に分割する。「花子」を a ，「太郎」を b ，「…が出席する」を F とすると，次のように記号化される。

$$F(a) \vee F(b)$$

これは，「a は出席する，または， b は出席する」という意味だが，「a は F である，または， b は F である」と表現してよい。

6.　普通名詞は述語になる

次の命題を考えてみる。

命題 A ：犬は動物である

これは，特定の一匹の犬を指して，この犬が動物であると主張しているわけではない。従って，「犬」を a ，「…は動物である」を F として， $F(a)$ と記号化するのは誤りである。「犬」は普通名詞であるので述語になるが，これは，集合で考えると理解しやすい。

いま，すべての犬からなる集合を（犬），すべての動物から集合を（動物）で表せば，命題 A は，次の「集合の包含関係」の成立を主張している。

命題 B ：（犬） $\subseteq$ （動物）

この包含関係は，集合の要素で表現すれば，次の意味である。

○　すべての x について， $x \in$ （犬） ならば $x \in$ （動物）である

○　すべての x について， x が 犬 ならば x は動物である

従って，「…は犬である」を F ,「…は動物である」を G とすると，命題 A は次のように記号化される。

命題 A の記号化： $\forall x\,(F(x) \to G(x))$

これは，すべての x について「$F(x) \to G(x)$」である，つまり，次の意味である。

○　すべての x について， x が F ならば x は G である

もともと，命題 A は次を主張していることに注意しよう。

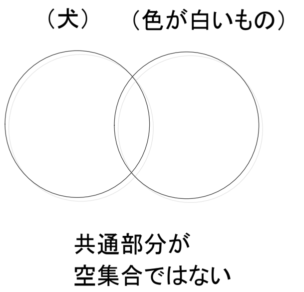
命題：すべての犬は動物である。

では，次の命題を考えてみよう。

命題 C ：ある犬は色が白い。

これも集合で考えてみる。この命題は，「犬であって，色が白いもの」が存在するということを主張しているが，これは 2 つの集合（犬），（色が白いもの）の共通部分が空集合 ϕ ではないことと同じ意味である。つまり，命題 C は，次の命題 D と同じである。

命題 D ：（犬）∩（色が白いもの） ≠ ϕ



命題 D は，これらの 2 つの集合の共通部分に要素が存在するという意味であるから，「…は犬である」を F ,「…は色が白い」を G とすると，命題 C は次のように記号化できる。

$$\exists x\,(F(x) \wedge G(x))$$

これは，以下のように表現すればよい。みな同じ意味である。

○　F と G をみたす x が存在する。
○　F と G をみたす x が少なくとも一つ存在する。
○　ある x については， F かつ G である。
○　少なくとも一つの x について， F かつ G である。

7.　全称記号（∀）と存在記号（∃）の読み方

全称記号「∀」は「すべて」，存在記号「∃」は「ある」を意味するが，ここで

$$\forall x F(x),\quad \exists x F(x)$$

の読み方を確認しておく。基本的には，その意味を理解していれば，どのような読み方（表現方法）でもよい。

- $\forall x F(x)$ の読み方
  - ・すべての x について，x は F である
  - ・すべての x について，F である
  - ・すべての x は，F である
  - ・どの x についても，x は F である
  - ・どの x も F である
  - ・任意の x は F である

- $\exists x F(x)$ の読み方
  - ・ある x について，x は F である
  - ・ある x について，F である
  - ・ある x は，F である
  - ・F である x が存在する
  - ・F であるような x が存在する
  - ・F である x が少なくとも１つ存在する

なお，日本語の「任意（にんい）」には「何でもよい」という意味があるが，これは数学では「すべて」と同義語である。「任意の x」と「すべての x」は，ニュアンスは多少異なるが，意味は同じである。例えば，「任意の整数 x について，～が成立する」とは，「すべての整数 x について，～が成立する」ことを意味する。

英語表現では次のようになるが，日常的には⑵のような表現はあまりしない。

⑴　All apples are red.　（すべてのリンゴは赤い。all ＝ すべて）
⑵　Arbitrary apples are red.　（任意のリンゴは赤い。arbitrary ＝ 任意）
⑶　Every apple is red.　（どのリンゴも赤い。every ＝ どの）

では，命題の記号化に慣れるために，以下の例題をやってみよう。

● 例題

以下の命題を述語論理で記号化せよ。

⑴　アインシュタインは天才である。

（説明）　「アインシュタイン」を a，「…は天才である」を F とすると

記号化：$F(a)$

⑵　太郎も次郎も背が高いが花子はそうではない。

（説明）　「太郎」を a，「次郎」を b，「花子」を c，「…は背が高い」を F とすると

記号化：$F(a) \wedge F(b) \wedge \sim F(c)$

(3)　花子は太郎が好きだが，次郎は太郎が好きではない。

（説明）　「花子」を a，「太郎」を b，「次郎」を c，「…は…が好きだ」を F とすると，

記号化：$F(a, b) \wedge \sim F(c, b)$

(4)　花子は太郎または次郎が好きである。

（説明）　「花子」を a，「太郎」を b，「次郎」を c，「…は…が好きである」を F とすると，

記号化：$F(a, b) \vee F(a, c)$

(5)　すべての天才は独身である。

（説明）　「…は天才である」を F，「…は独身である」を G とすると，

記号化：$\forall x\,(F(x) \rightarrow G(x))$

(6)　ある学生はクリスチャンである。

（説明）　「…は学生である」を F，「…はクリスチャンである」を G とすると，

記号化：$\exists x\,(F(x) \wedge G(x))$

(7)　優しい青年はみな好かれる。

（説明）　「…は優しい」を F，「…は青年である」を G，「…は好かれる」を H とすると，

記号化：$\forall x\,((F(x) \wedge G(x)) \rightarrow H(x))$

(8)　マルクスを尊敬しない学者がいる。

（説明）　「マルクス」を a，「…は…を尊敬する」を F，「…は学者である」を G とすると，

記号化：$\exists x\,(\sim F(x, a) \wedge G(x))$

(9)　日本人はアメリカ人でない。

（説明）　「…は日本人である」を F，「…はアメリカ人である」を G とすると，

記号化：$\forall x\,(F(x) \rightarrow \sim G(x))$

(10)　太郎がいる。

（説明）　「太郎」を a 「…がいる」を F とすると，

記号化：$F(a)$

(11)　日本人がいる。

（説明）　「…は日本人である」を F とすると，

記号化：$\exists x F(x)$

(12)　日本人もアメリカ人もいる。

（説明）　「…は日本人である」を F，「…アメリカ人である」を G とすると，

記号化：$\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$

8.　１項述語と多項述語

述語は，次のように分類される。

○　１項述語　…　１個の個体の性質を表す述語　例：$F(a)$
○　２項述語　…　２個の個体の関係を表す述語　例：$F(a,b)$
○　３項述語　…　３個の個体の関係を表す述語　例：$F(a,b,c)$
○　n 項述語　…　n 個の個体の関係を表す述語　例：$F(a_1, a_2, \cdots, a_n)$
○　多項述語　…　２項以上の述語

また，例えば，2 項述語の命題 $F(a,b)$ に対する命題関数は $F(x,y)$ の形になり，個体変項は x と y の 2 つである。

$F(a,b)$ における F は，a と b の関係を表す述語であるが，これを個体からなる組 (a,b) に関する述語と考えることもある。この考え方では，$F(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ における n 項述語 F は，

n 個の個体からなる組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に関する述語

になる。

9.　個体変項の量化と作用域

命題関数において，個体変項 x に「すべて」や「ある」といった量を与えることを，「x を量化する」という。（以下，「個体変項」は変項，「個体定項」は定項と呼ぶことにする。）

例えば，命題関数には，次のようにいろいろな形がある。

$$F(x),\ F(x)\wedge G(x),\ F(x)\to G(x),\ F(x,y),\ F(x)\vee G(y)$$

命題関数の中の変項を量化する場合は，

（※）　量化子（命題関数）

の形で記述する。ただし，命題関数に論理記号が含まれていないときは，（命題関数）の両側の括弧は省略できる。例えば，$\forall x\,(F(x))$ は，$\forall x F(x)$ と書いてよい。

（※）において，「（命題関数）」の部分を，<u>量化子の作用域</u>と呼ぶ。この作用域は，直前の量化子によって適用される量化の範囲を示す。

例えば，次の下線部は，$\forall x$ の作用域である。

$$\forall x\,\underline{F(x)}\ ,\ \forall x\,\underline{(F(x)\vee G(x))}\ ,\ \forall x\,\underline{F(x)}\ \vee\ \exists x\,G(x)$$

また，次の下線部は，$\exists x$ の作用域である。

$$\exists x\,\underline{F(x)}\ ,\ \exists x\,\underline{(F(x)\vee G(x))}\ ,\ \forall x F(x)\ \vee\ \exists x\,\underline{G(x)}$$

さらに，次も理解できるだろう。

$\forall x\,(\underline{\exists y F(x, y)})$　…　$\forall x$ の作用域は下線部

$\forall x\,(\exists y\,\underline{F(x, y)})$　…　$\exists y$ の作用域は下線部

量化される命題関数の変項については，次の重要なルールがある。

量化子によって量化される変項は，その量化子の作用域の中の量化されていない同じ文字の変項のみである。

このルールは，個体の同一性をも指摘する。例えば，$\forall x$によって量化された変項xと，その$\forall x$のxとは，同じ個体を表す。しかし，$\forall x$によって量化されていない変項xと，その$\forall x$のxとは無関係であり，同じ個体を意味しない。

(1)　$\forall x\,(F(x) \vee G(x))$

・これは，「すべてのxについて，xはFであり，または，xはGである」という意味である。

・$\forall x$によって，「$F(x)$のx」と「$G(x)$のx」が量化されている。

・また，「$\forall x$」「$F(x)$」「$G(x)$」のxは，みな同じ個体（不特定の個体）を表す。

(2)　$\forall x F(x) \vee \forall x G(x)$

・これは，「すべてのxについてxはFであるか，または，すべてのxについてxはGであるか」という意味である。

・1 番目の$\forall x$によって「$F(x)$のx」が量化され，2 番目の$\forall x$によって「$G(x)$のx」が量化される。しかし，1 番目の$\forall x$によって「$G(x)$のx」が量化されているわけではない。

・従って，「1 番目の$\forall x$のx」と「$G(x)$のx」は，同一の個体を意味しない。従って，上記の論理式は次と同じになる。

$$\forall x F(x) \vee \forall y G(y)$$

(3)　$\exists x\,(F(x) \vee \forall x G(x))$

・$G(x)$のxは，$\forall x$によってすでに量化されている。従って，$\exists x$は，「$F(x)$のx」のみを量化することになり，「$G(x)$のx」は量化しない。

・つまり，「$\exists x$のx」と「$G(x)$のx」は，同一の個体を意味しない。この場合も，上記の論理式は次と同じになる。

$$\exists x\,(F(x) \vee \forall y G(y))$$

(4)　$\forall x\,(\forall y F(x, y))$

・$F(x, y)$のyは$\forall y$によって量化され，$F(x, y)$のxは$\forall x$によって量化される。

● 練習問題

次の論理式において，量化子の作用域を求めよ。

⑴　$\forall x(F(x) \to G(x)) \to \exists x F(x)$

⑵　$\forall x(F(x) \to \exists y G(y))$

⑶　$\forall x(\exists x\,(F(x) \to G(x)))$

＜解答＞

⑴　$\forall x$の作用域は　$\underline{(F(x) \to G(x))}$，$\exists x$ の作用域は　$\underline{F(x)}$

⑵　$\forall x$の作用域は　$\underline{(F(x) \to \exists y G(y))}$，$\exists y$ の作用域は　$\underline{G(y)}$

⑶　$\forall x$の作用域は　$\underline{(\exists x\,(F(x) \to G(x)))}$，$\exists x$ の作用域は　$\underline{(F(x) \to G(x))}$

10.　束縛変項と自由変項

論理式の中の変項は，束縛（そくばく）変項と自由変項の 2 種類に分類される。

○　束縛変項　…　量化されている変項
○　自由変項　…　量化されていない変項（不定の対象を表す変項）

量化子によって量化されている変項は，量化子によって束縛されているともいう。束縛されている変項が，束縛変項である。

例えば，論理式

$$\forall x\,(F(x) \lor G(x))$$

において，「$F(x)$の x」と「$G(x)$の x」は，ともに$\forall x$によって量化されている（束縛されている）ので，どちらも束縛変項である。同様に，

$$\forall x\,(F(x) \lor \exists y G(y))$$

では，「$F(x)$の x」と「$G(y)$の y」のどちらも束縛変項である。

しかし，次の論理式では，「$F(x)$の x」は束縛変項だが，「$G(x)$の x」は自由変項である。

$$\forall x F(x) \to G(x)$$

この論理式は，次のように書き換えても同じである。

$$\forall x F(x) \to G(y)$$

一般に，自由変項を含まない論理式を「閉じた論理式」，自由変項を含む論理式を「開いた論理式」という。開いた論理式では，同じ名前の自由変項は，同一の個体を意味する。

（例１）$\forall x\,(F(x) \to (G(y) \to H(x, y)))$

開いた論理式になる。束縛変項は，$F(x)$ と $H(x, y)$ の x である。自由変項は，$G(y)$ と $H(x, y)$ の y であり，両者の y は同一の個体である。

（例２） $\forall x\,(F(x) \to \exists y(G(y) \to H(x, y)))$

閉じた論理式になる。束縛変項は，$F(x)$ と $H(x, y)$ の x と，$G(y)$ と $H(x, y)$ の y である。自由変項はない。

● **練習問題**

次の論理式において，束縛変項と自由変項を求めよ。

⑴ $\forall xF(x) \wedge G(y)$

⑵ $\forall x(F(x) \wedge G(x) \wedge H(y))$

⑶ $\forall x(F(x) \wedge G(x) \wedge \exists yH(y))$

⑷ $\forall xF(x) \to \exists y(G(x) \wedge H(y))$

⑸ $\forall x(\exists y\,(F(y) \wedge G(x)))$

⑹ $\forall xF(x) \to (\forall xG(x) \vee H(x))$

⑺ $\forall x(\forall y(F(x, y) \to G(x, y)))$

⑻ $\forall x(\exists y(F(x, y)))$

＜解答＞

⑴ $F(x)$ の x が束縛変項，$G(y)$ の y が自由変項

⑵ $F(x)$ と $G(x)$ の x が束縛変項，$H(y)$ の y が自由変項

⑶ $F(x)$ と $G(x)$ の x，$H(y)$ の y が束縛変項

⑷ $F(x)$ の x，$H(y)$ の y が束縛変項，$G(x)$ の x が自由変項

⑸ $F(y)$ の y，$G(x)$ の x が束縛変項

⑹ $F(x)$ と $G(x)$ の x は束縛変項，$H(x)$ の x は自由変項

⑺ $F(x, y)$ と $G(x, y)$ の x, y は，みな束縛変項

⑻ $F(x, y)$ の x, y は束縛変項

11.　括弧の省略

$F(a)$ の否定命題は，厳密には

$$\sim(F(a))$$

で表すが，通常はカッコを省略して，

$$\sim F(a)$$

で表す。命題関数についても同様であり，$F(x)$ の否定は

$$\sim F(x)$$

で表す。

<u>全称記号∀や存在記号∃の入った命題を「量化命題」と呼ぶ</u>。量化命題

$$\forall xF(x)$$

の否定命題は，

$$\sim \forall x F(x)$$

で表す。これは，カッコを省略せずに書けば

$$\sim (\forall x F(x))$$

となる。また，

$$\forall x \sim F(x)$$

は，次の意味になる。

$$\forall x (\sim F(x))$$

量化命題を表す論理式では，カッコを省略した省略形を用いても良い。

	省略形	カッコを省略しない形
①	$\sim \forall x F(x)$	$\sim (\forall x F(x))$
②	$\forall x \sim F(x)$	$\forall x (\sim F(x))$
③	$\sim \exists x F(x)$	$\sim (\exists x F(x))$
④	$\exists x \sim F(x)$	$\exists x (\sim F(x))$
⑤	$\sim \forall x \sim F(x)$	$\sim (\forall x (\sim F(x)))$
⑥	$\sim \exists x \sim F(x)$	$\sim (\exists x (\sim F(x)))$
⑦	$\forall x \forall y F(x, y)$	$\forall x (\forall y F(x, y))$
⑧	$\forall x \exists y F(x, y)$	$\forall x (\exists y F(x, y))$
⑨	$\forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$	$(\forall x F(x)) \wedge (\forall x G(x))$

12　命題の分類

1.　個体領域（議論領域）

命題を考察する際に，個体の存在範囲を限定して議論する場合がある。このような個体の存在範囲を「個体領域（または議論領域）」という。個体領域は一定の空でない集合であり，通常 D で表す。例えば

（※）すべての学生は英語ができる

という命題は，個体領域を設定しなければ，その記号化は次のようになる。

$$\forall x\,(F(x) \to G(x))$$

しかし，個体領域 D を設定した場合，もう少し簡潔に記号化できる。D として「すべての学生からなる集合」と定め，「…は英語ができる」を F とすると

すべての x について，x が学生ならば x は英語ができる

という命題は，「すべての x 」の x とは D に属する個体，すなわち，学生のことになり，

すべての個体 x （学生）は英語ができる

と簡潔に表現できる。従って，命題（※）は，次のように記号化できる。

個体領域 D ：すべての学生からなる集合
記号化　　：$\forall x F(x)$

個体領域 D は自由に設定してよいが，D をどのような集合にするかで，命題の真偽も異なってくる。

個体領域は，数学における関数の定義域に相当する。例えば，関数 $y = x + 1$ を

$$y = x + 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

と表現すれば，変数 x の動く範囲が，定義域（$0 \leq x \leq 1$）になる。

命題関数 $F(x)$ に個体領域 D を設定すれば，変項 x の動く範囲が D ということになる。同様に，$F(x, y)$ に個体領域 D を設定すれば，変項 x，y の動く範囲が D である。

ただし，$F(x, y)$ において，x の動く範囲と y の動く範囲が異なるときは，「x の個体領域」「y の個体領域」という言い方をする。

x の個体領域 D_1　…　x の動く範囲
y の個体領域 D_2　…　y の動く範囲

●　練習問題

個体領域 D を「すべての学生からなる集合」とした場合，以下の命題を記号化せよ。

(1)　すべての学生は英語ができる。

(2)　すべての学生は英語ができない。

(3)　ある学生は英語ができる。

(4)　ある学生は英語ができない。

(5)　すべての学生は，英語とドイツ語ができる。

(6)　ある学生は，英語またはドイツ語ができる。

＜解答＞

「…は英語ができる」を F，「…はドイツ語ができる」を G とする。

(1)　$\forall x F(x)$

(2)　$\forall x \sim F(x)$

(3)　$\exists x F(x)$

(4)　$\exists x \sim F(x)$

(5)　$\forall x\,(F(x) \wedge G(x))$

(6)　$\exists x\,(F(x) \vee G(x))$

2.　命題の分類

1 項述語からなる要素命題の形（命題型）は，以下のように分類される。詳細は略すが，これは伝統的論理学での分類である。(3)～(6)は「定言的命題」と呼ばれ，それぞれ（A）（E）（I）（O）と表された。単称命題とは，特定の個体の性質を主張する命題である。

(1) 単称肯定命題

命題型：a は F である　(a is F)

記号化：$F(a)$

(2) 単称否定命題

命題型：a は F でない　(a is not F)

記号化：$\sim F(a)$

(3) 全称肯定命題（A）

命題型：すべての x は F である　(All x is F)

記号化：$\forall x F(x)$

(4) 全称否定命題（E）

命題型：すべての x は F でない　（どの x も F でない）　(No x is F)

記号化：$\forall x \sim F(x)$

(5) 特殊肯定命題（存在肯定命題）（I）

命題型：ある x は F である　（F である x が存在する）　(Some x is F)

記号化：$\exists x F(x)$

(6) 特殊否定命題（存在否定命題）（O）

命題型：ある x は F でない　（F でない x が存在する）　(Some x is not F)

記号化：$\exists x \sim F(x)$

特殊肯定命題の「ある x は F である」は，「F であるような x が存在する」という，存在を主張した命題でもあるから，「存在肯定命題」とも呼ぶ。存在否定命題についても，同様である。

全称否定命題の(4)は，

すべての x は「F でない」

という意味であり，

「すべての x は F 」でない

という意味ではないことに注意しよう。日本語表現としては，「どの x も F でない」の方がより明確である。

3.　量化命題の否定

厳密な証明は後回しにして，基本的な量化命題の否定を説明する。以下，個体領域 D を「カラスの集合」，述語 $F(x)$ は「x は黒い」とする。

① $\sim \forall x F(x) = \exists x \sim F(x)$

・（全称肯定命題）の否定 ＝ 特殊否定命題

・「すべての x は F である」の否定 ＝ ある x は F でない

・すべてのカラスは黒い，というわけではない ＝ あるカラスは黒くない

② $\sim \forall x \sim F(x) = \exists x F(x)$

・（全称否定命題）の否定 ＝ 特殊肯定命題

・「すべての x は F でない」の否定 ＝ ある x は F である

・すべてのカラスは黒くない，というわけではない ＝ あるカラスは黒い

③ $\sim \exists x F(x) = \forall x \sim F(x)$

・（特殊肯定命題）の否定 ＝ 全称否定命題

・「ある x は F である」の否定 ＝ すべての x は F でない

・あるカラスは黒い，というわけではない ＝ すべてのカラスは黒くない

④ $\sim \exists x \sim F(x) = \forall x F(x)$

・（特殊否定命題）の否定 ＝ 全称肯定命題

・「ある x は F でない」の否定 ＝ すべての x は F である

・あるカラスは黒くない，というわけではない ＝ すべてのカラスは黒い

以下の図では，1 は黒いカラス，0 は黒くないカラスを表す。

Ａ：すべてのカラスは黒い
（全称肯定命題）

1	1
1	1

Ｅ：どのカラスも黒くない
（全称否定命題）

0	0
0	0

Ｉ：あるカラスは黒い
（特殊肯定命題，存在肯定命題）

1	…
…	…

Ｏ：あるカラスは黒くない
（特殊否定命題，存在否定命題）

0	…
…	…

量化命題の否定は，$\forall$ を $\exists$，$\exists$ を $\forall$ に変更し，あとは，命題論理の場合と同様になる。つまり，「すべて」は「ある」，「ある」は「すべて」，「または」は「かつ」，「かつ」は「または」に変更し，論理式を構成する各命題や各命題関数の否定をとればよい。ただし，条件文 $A \to B$ の否定は，$A \wedge \sim B$ になることに注意する。

● 練習問題１

次の命題の否定命題を求めよ。

(1)　$\forall x\,(F(x) \wedge G(x))$

(2)　$\forall x\,(F(x) \vee G(x))$

(3)　$\exists x\,(F(x) \wedge G(x))$

(4)　$\exists x\,(F(x) \vee G(x))$

(5)　$\forall x\,(F(x) \to G(x))$

(6)　$\forall x\,\exists y F(x, y)$

＜解答＞

(1)　$\sim\forall x\,(F(x) \wedge G(x)) = \exists x\,(\sim F(x) \vee \sim G(x))$

(2)　$\sim\forall x\,(F(x) \vee G(x)) = \exists x\,(\sim F(x) \wedge \sim G(x))$

(3)　$\sim\exists x\,(F(x) \wedge G(x)) = \forall x\,(\sim F(x) \vee \sim G(x))$

(4)　$\sim\exists x\,(F(x) \vee G(x)) = \forall x\,(\sim F(x) \wedge \sim G(x))$

(5)　$\sim\forall x\,(F(x) \to G(x)) = \sim\forall x\,(\sim(F(x) \wedge \sim G(x)))$

$= \sim\forall x\,(\sim F(x) \vee G(x)) = \exists x(F(x) \wedge \sim G(x))$

(6)　$\sim\forall x\,\exists y F(x, y) = \exists x \forall y \sim F(x, y)$

● 練習問題２

次の命題の否定命題を求めよ。

(1)　女性は美しい。

⑵　流行品はどれも高い。
⑶　マンガはくだらない。
⑷　背が高くない日本人がいる。
⑸　結婚すれば幸せになる。

＜解答＞

⑴　「ある女性は美しくない」「美しくない女性がいる」
⑵　「ある流行品は高くない」「高くない流行品がある」
⑶　「あるマンガはくだらなくない」「くだらなくないマンガがある」
⑷　「すべての日本人は背が高い」
⑸　「ある人は結婚しているが幸せでない」「結婚しているが幸せでない人がいる」

4.　２項述語の場合の量化命題

２項述語とは，次のように，２つの個体定項や個体変項をとる述語である。

$F(a,b)$， $F(x,y)$， $F(x,a)$， $F(a,y)$

ここで，$\forall x$ や $\exists x$ に慣れる意味で，２項述語の記号化を少し練習しておこう。

■ 例題１

次のように定める。以下の命題の記号化は容易であろう。

・個体領域 D ：人間の集合
（個体変項 x, y が存在する範囲の集合）
・個体定項：「太郎」を a，「花子」を b とする
・述語 $F(x,y)$ ： x は y を愛している

(1)　命題：太郎は，花子を愛している。
記号化： $F(a,b)$

(2)　太郎は，花子を愛していない。
記号化： $\sim F(a,b)$

(3)　すべての人は，太郎を愛している。
記号化： $\forall x F(x,a)$

(4)　ある人は，太郎を愛している。
記号化： $\exists x F(x,a)$

(5)　どの人も太郎を愛していない。
記号化： $\forall x \sim F(x,a)$

(6)　ある人は，太郎を愛していない。
記号化： $\exists x \sim F(x,a)$

(7)　太郎は，すべての人を愛している。

記号化：$\forall x F(a, x)$

(8)　太郎は，ある人を愛している。

記号化：$\exists x F(a, x)$

(9)　太郎は，どの人も愛していない。

記号化：$\forall x \sim F(a, x)$

(10)　太郎は，ある人を愛していない。

記号化：$\exists x \sim F(a, x)$

(11)　すべての人は，太郎と花子を愛している。

記号化：$\forall x\,(F(x, a) \wedge F(x, b))$

(12)　ある人は，太郎と花子を愛している。

記号化：$\exists x\,(F(x, a) \wedge F(x, b))$

(13)　すべての人は，太郎か花子を愛している。

記号化：$\forall x\,(F(x, a) \vee F(x, b))$

■ 例題２

次の命題を記号化せよ。ただし，個体領域Dは人間の集合とする。

(1)　すべての人は，誰かの子供か誰かの親である。

(2)　すべての人を愛している人は，すべての人から愛されている。

(3)　誰にも愛されず，誰をも愛していない人はいない。

＜説明＞

(1)　「xはyの子供である」を$F(x, y)$，「xはyの親である」を$G(x, y)$とする。

「xは誰かの子供である」は，“xはyの子供である”ようなyが存在することなので，

$$\exists y F(x, y)$$

と記号化できる。従って，「すべての人は，誰かの子供である」は，

$$\forall x \exists y F(x, y)$$

$G(x, y)$についても同様なので，例題の命題の記号化は次のとおり。

記号化：$\forall x(\exists y F(x, y) \vee \exists y G(x, y))$

これで良いが，$F(x, y)$は「yはxの親である」という意味でもあるので，次のように記号化してもよい。

記号化：$\forall x(\exists y F(x, y) \vee \exists y F(y, x))$

(2)　「xはyを愛している」を$F(x, y)$とする。

「xはすべての人を愛している」は $\forall y F(x, y)$，「xはすべての人から愛されている」

は $\forall y F(y, x)$ であるから，命題の記号化は次のとおり。

記号化：$\forall x(\forall y F(x, y) \to \forall y F(y, x))$

(3)　「x は y を愛している」を $F(x, y)$ とする。

「x は誰にも愛されていない」は $\forall y \sim F(y, x)$，「x は誰をも愛していない」は $\forall y \sim F(x, y)$ であるから，命題の記号化は次のとおり

記号化：$\sim \exists x (\forall y \sim F(y, x) \wedge \forall y \sim F(x, y))$

● 練習問題１

以下の命題を記号化せよ。また，その命題の否定を日本語の文章で表せ。ただし，「x は y を愛している」を $F(x, y)$ とし，個体領域 D は人間の集合とする。

(1)　すべての人は，すべての人から愛されている。

(2)　すべての人は，ある人から愛されている。

(3)　ある人は，すべての人から愛されている。

(4)　ある人は，ある人から愛されている。

＜解答＞

(1)　記号化：$\forall x \forall y F(y, x)$
否定：ある人は，ある人から愛されていない。
ある人から愛されていない人がいる。

(2)　記号化：$\forall x \exists y F(y, x)$
否定：ある人は，すべての人から愛されていない。
どの人からも愛されていない人がいる。

(3)　記号化：$\exists x \forall y F(y, x)$
否定：すべての人は，ある人から愛されていない。
どの人にも自分を愛していない人がいる。

(4)　記号化：$\exists x \exists y F(y, x)$
否定：すべての人は，すべての人から愛されていない。
どの人もすべての人から愛されていない。

■ 例題３

以下の命題を記号化せよ。ただし，「x は y を愛している」を $F(x, y)$ とし，個体領域 D は人間の集合とする。また，「花子」を a，「太郎」を b とする。

(1)　花子は，太郎を愛している人をすべて愛している。

(2)　すべての人は，太郎を愛している人をすべて愛している。

(3)　花子は，誰かを愛している人をすべて愛している。

(4)　すべての人は，誰かを愛している人をすべて愛している。

＜説明＞

(1)　人間 x について，「x が太郎を愛していれば，花子は x を愛している」は，

$$F(x, b) \to F(a, x)$$

と記号化できる。問題の命題は，この条件文がすべての x について成立することを主張しているので，次のように記号化される。

記号化：$\forall x\,(F(x, b) \to F(a, x))$

(2)　(1)において，花子 a を「すべての人」に変えればよい。つまり，人間 x について，「x が太郎を愛していれば，すべての人は x を愛している」は，

$$F(x, b) \to \forall y F(y, x)$$

と表現できる。問題の命題は，この条件文がすべての x について成立することを主張しているので，次のように記号化される。

記号化：$\forall x\,(F(x, b) \to \forall y F(y, x))$

(3)　(1)において，太郎 b を「ある人に」変更すればよい。つまり，人間 x について，「x がある人を愛していれば，花子は x を愛している」は，

$$\exists y F(x, y) \to F(a, x)$$

と表現できる。問題の命題は，この条件文がすべての x について成立することを主張しているので，次のように記号化される。

記号化：$\forall x\,(\exists y F(x, y) \to F(a, x))$

(4)　(2)と(3)の組み合わせなので，次のようになる。

記号化：$\forall x\,(\exists y F(x, y) \to \forall y F(y, x))$

y については，次のように記号を変えても同じである。

記号化：$\forall x\,(\exists y F(x, y) \to \forall z F(z, x))$

5.　$\forall x \exists y\, F(x, y)$ に関する注意

ここでは，$\forall x \exists y F(x, y)$ の解釈について注意をしておく。

前の例題で説明したように，

（※）すべての人は，誰かの子供である

という命題は，$\forall x \exists y F(x, y)$ と記号化できた。個体領域は人間の集合で，$F(x, y)$ は「x は y の子供である」という述語である。

命題（※）は「どの人にも親がいる」という意味でもあるが，その親は人それぞれに対して決まる親である。つまり，（※）は，A という一人の人間がいて，すべての人が A の子供であるという意味ではない。

$\forall x \exists y F(x, y)$ は，「すべての x に対して，ある y が存在して $F(x, y)$ である」，あるいは「すべての x に対して $F(x, y)$ であるような y が存在する」と表現してよいが，文をカギ括弧でくくれば，$\forall x \exists y F(x, y)$ は

「すべての x に対して $F(x, y)$ である」ような y が存在する

という意味ではなく，

すべての x に対して，「$F(x, y)$ であるような y が存在する」

という意味である。言い換えれば，

どんな x であっても，その x に対して $F(x, y)$ であるような y が存在する

という意味であり，この文の最後の y は一人の人間 x に対して決まる親である。
以下の数学的な命題を考えれば，上記の違いが明確になるだろう。

■ 例題４

個体領域は実数全体の集合とし，変項 x，y に対して，述語 $F(x, y)$ は $x = 2y$ という関係とする。以下の命題を日本語で表現し，その真偽を調べよ。

⑴　$\forall x \forall y \ (x = 2y)$

⑵　$\exists x \forall y \ (x = 2y)$

⑶　$\forall x \exists y \ (x = 2y)$

⑷　$\exists x \exists y \ (x = 2y)$

＜説明＞

⑴　x も y もすべてであるので，次のように表現できる。

命題：すべての実数 x，y に対して，$x = 2y$ が成立する

この命題は，例えば，$x = 1$，$y = 0$ でも $x = 2y$ が成立すると主張しているが，当然，その場合は $x = 2y$ は不成立なので，命題は偽である。

⑵　次のように表現できる。

命題：ある実数 x があって，すべての実数 y に対して $x = 2y$ が成立する

この命題のある実数を x_0 で表せば，$x_0 = 2y$ を満たす y は $\frac{1}{2}x_0$ のみである。よって，すべての実数 y について $x_0 = 2y$ が成立しているわけではないので，命題は偽である。

⑶　「すべての実数 x に対して，ある実数 y があって $x = 2y$ が成立する」と表現してよいが，これを

「すべての実数 x に対して $x = 2y$ が成立する」ような実数 y が存在する

と解釈するのは誤りである。この解釈では，その記号化は $\exists y \forall x \ (x = 2y)$ であり，⑵と

同様の理由で命題は偽になる。

少し丁寧に書けば，次のようになる。

命題：どのような実数 x に対しても，（その x に対して） $x = 2y$ が成立するような実数 y が存在する

この命題は真である。どんな実数 x_0 であっても，その x_0 に対して $y = \frac{1}{2}x_0$ と置けば $x_0 = 2y$ が成立し， $x_0 = 2y$ が成立するような y が存在するからである。

(4)　x も y も「ある」なので，次のように表現できる。

命題：ある実数 x，y について， $x = 2y$ が成立する

$x = 2$， $y = 1$ であれば $x = 2y$ が成立するので，この命題は真である。

13　論理式の妥当性

1.　論理式に解釈を与える

論理式 $F(a)$ の真偽を確定するには，述語 F や個体 a の具体的説明が必要である。$\forall xF(x)$ も同様であり，個体領域の取り方によって真にも偽にもなる。

・個体領域が犬の集合，$F(x)$ は「x は動物である」　⇒　$\forall xF(x)$ は真
・個体領域が生物の集合，$F(x)$ は「x は動物である」　⇒　$\forall xF(x)$ は偽

述語論理の場合，論理式の真偽を確定するためには，論理式を構成する各記号に具体的な意味を与える必要がある。「各記号に具体的な意味を割り当てる」ことを，「論理式に解釈を与える」という。

論理式に解釈を与えるとは，次の(1)～(3)を確定することである。確定された(1)～(3)を論理式の解釈（interpretation）といい，通常 I で表す。

> ● 論理式の解釈（I）
> (1)　述語記号（述語を表す記号）に，具体的な意味を割り当てる。
> (2)　個体定項に，特定の個体を割り当てる。
> (3)　個体領域 D を具体的に設定する。

論理式に解釈が与えられたとき，$\forall xF(x)$，$\exists xF(x)$ の真偽は次の意味になる。

> ● 個体領域 D が設定された場合
> (1)　$\forall xF(x)$ が真　⇔　D に属する任意の定項 u に対して $F(u)$ が真
> (2)　$\exists xF(x)$ が真　⇔　D に属するある定項 a に対して $F(a)$ が真
> 　　　⇔　$F(a)$ が真となるような D に属する定項 a が存在

■　例題 1

以下の論理式（条件文）の真偽を，次の解釈 I のもとで決定せよ。

解釈 I : 個体領域 D ＝動物全体，$F(x)$ ＝「x は肉食である」

(1)　$\exists xF(x) \to \forall xF(x)$

(2)　$\forall xF(x) \to \exists xF(x)$

＜説明＞

肉食動物は存在するので $\exists xF(x)$ は真，肉食でない動物は存在するので $\forall xF(x)$ は偽である。(1)は 真→偽，(2)は 偽→真なので，(1)の論理式は偽，(2)の論理式は真である。

■　例題 2

以下の論理式（条件文）の真偽を，次の解釈 I のもとで決定せよ。

解釈 I : 個体領域 D ＝自然数全体，$F(x)$ ＝「x は偶数である」，

$G(x)=$「xは奇数である」

(1)　$\forall x(F(x) \vee G(x)) \rightarrow (\forall xF(x) \vee \forall xG(x))$

(2)　$\exists x(F(x) \vee G(x)) \rightarrow (\exists xF(x) \vee \exists xG(x))$

＜説明＞

すべての自然数は偶数または奇数であるので，(1)と(2)の前件はともに真である。一方，$\forall xF(x)$と$\forall xG(x)$はともに偽，$\exists xF(x)$と$\exists xG(x)$はともに真である。

従って，(1)は 真→偽，(2)は 真→真なので，(1)の論理式は偽，(2)の論理式は真である。

2.　妥当式

様々な形の論理式があるが，それを簡単に A で表す。論理式の真偽はその解釈によって定まることから，次の(1)～(3)の 3 種類に分類される。

● 論理式 A の分類

(1)　いかなる解釈のもとでも，A は真である。（このとき，A は妥当である，A は妥当式であるという。）

(2)　いかなる解釈のもとでも，A は偽である。（このとき，A は矛盾である，A は矛盾式であるという。）

(3)　A は，(1)でも(2)でもない論理式である。（ある解釈のもとでは A は真になり，別の解釈のもとでは A は偽になる。）

妥当式は，命題論理の恒真命題（トートロジー）に相当する。そのため，妥当であることを「恒真である」と表現することもある。

述語論理では，妥当式は「論理的な真理」を意味する。論理的な真理とは，論理記号（～，∧，∨，→，↔，∀，∃）のみによって真となる真理性のことであり，定項，述語，個体領域の解釈をどのように与えても，その真理性は影響を受けない。定項がどの個体を指すのか，述語がいかなる性質や関係を表すのか，あるいは，議論されている個体領域がどのようなものか，このような現実世界の要因には関わりなく，真となる論理式が妥当式である。

論理式が妥当でないことを示す 1 つの方法は，その論理式が偽になるような解釈を 1 つ与えればよい。

妥当式はたくさんある。命題論理における恒真命題の命題記号に，述語論理における論理式を代入すれば妥当式になる。例えば，命題論理の論理式 $A \vee \sim A$ は恒真なので，

$$\forall xF(x) \vee \sim\forall xF(x)$$

は妥当式である。また，論理式 $(A \wedge B) \rightarrow A$ も恒真なので

$$(\forall xF(x) \wedge \forall xG(x)) \rightarrow \forall xF(x)$$

は妥当式である。

以下に，妥当式の例をいくつかあげておく。証明は省略する。以下では，$X = Y$ のように等号（=）で表現しているものがあるが，これは，双条件文 $X \leftrightarrow Y$ が妥当であるという

意味である。つまり，いかなる解釈のもとでも，$X \to Y$ と $X \to Y$ がともに真という意味である。

■ 妥当式の例

(1)　$\sim \forall x F(x) = \exists x \sim F(x)$

(2)　$\sim \exists x F(x) = \forall x \sim F(x)$

(3)　$\forall x (F(x) \wedge G(x)) = \forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$

(4)　$(\forall x F(x) \vee \forall x G(x)) \to \forall x (F(x) \vee G(x))$

(5)　$\exists x (F(x) \vee G(x)) = \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$

(6)　$\exists x(F(x) \wedge G(x)) \to (\exists x F(x) \wedge \exists G(x))$

(7)　$\forall x \forall y F(x, y) = \forall y \forall x F(x, y)$

(8)　$\exists x \exists y F(x, y) = \exists y \exists x F(x, y)$

(9)　$\exists x \forall y F(x, y) \to \forall y \exists x F(x, y)$

■ 例題

以下の論理式が妥当でないことを示す解釈を 1 つ示せ。

(1)　$\forall x F(x) \vee \forall x \sim F(x)$

(2)　$(\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)) \to \exists x(F(x) \wedge G(x))$

＜説明＞

(1)　解釈 I：個体領域 D ＝人間の集合，$F(x)$ ＝「x は男である」

この解釈のもとでは，当然，$\forall x F(x)$ も $\forall x \sim F(x)$ も偽であるから，(1)の論理式は偽となり，妥当でない。

(2)　解釈 I：個体領域 D ＝人間の集合，$F(x)$ ＝「x は男である」
$G(x)$ ＝「x は女である」

この解釈のもとでは，当然，$\exists x F(x)$ も $\exists x G(x)$ も真であるから，(2)の条件文の前件は真である。しかし，その後件は偽である。従って，(2)の条件文は 真→偽となるので，偽である。従って，(2)の論理式は妥当でない。

3.　述語論理と決定手続き

命題論理の場合には，ある論理式が恒真であるかどうかは，その真理表を作成するという機械的な手続きで有限回の内に必ず決定できる。n 個の命題記号 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ から作られた，いかに複雑な論理式であっても，論理式の真理表の行数は有限であるため，真理表を作成することは理論的に可能である。そして，真理表の真理値によって恒真性が判定できる。このように，ある論理式が恒真かどうかを有限回の機械的手続きで決定する方法を「決定手

続き」という。

しかし，述語論理では，「決定手続き」は存在しないことが証明されている。つまり，一般には，論理式が妥当であるかどうかを有限回の手続きでは判定できないということである。ただし，一方では，妥当な論理式は，その妥当性を有限回の手続きで証明できることも知られている。その証明方法には，自然演繹法やタブローがある。

4.　推論の妥当性

述語論理における「推論の正しさ」「推論の妥当性」の意味は，命題論理の場合と同じである。

少し復習すると，一般に，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ を n 個の前提，C を結論とすれば，推論は次の形で表現できる。

（推論）　A_1，A_2，…，A_n　ゆえに C

これは，「$A_1, A_2, \cdots, A_n$ がすべて成立すれば，必ず C も成立する」ことを主張する。

また，推論は，次の条件文の形で表現できる。

(a)　$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \to C$

これを簡単に次のようにも書く。

(b)　A_1，A_2，…，A_n $\to C$

(a)や(b)を，「推論式」と呼ぶ。

推論式が妥当式になるとき，推論は「正しい」「妥当である」という。つまり，推論が正しいとは，いかなる解釈のもとでも推論式が恒真になる，ということである。

5.　自然演繹法による推論

一般に，述語論理では，以下の 4 つの推論規則を導入し，自然演繹法によって推論を行う。すなわち，以下の論理式（条件文）は妥当式であると認めて推論を行う。個体の a や u は，あくまでも考えている個体領域に属する個体である。

(1)　全称消去（$\forall_-$）（全称例化）

①　$\forall x F(x) \to F(u)$　（u は任意の個体）

②　$\forall x F(x) \to F(a)$　（a は特定の個体）

意味：すべての個体 x について x が F ならば，任意の個体 u あるいは特定の個体 a についても F である。

(2)　全称導入（$\forall_+$）（全称汎化）

①　$F(u) \to \forall x F(x)$　（u は任意の個体）

意味：任意の個体uがFならば，すべての個体xについてxはFである。

⑶　存在消去（∃_）（存在例化）

①　$\exists x F(x) \quad \to \quad F(a)$　（aは特定の個体）

意味：あるxについてxがFならば，特定の個体aはFである。

⑷　存在導入（∃+）（存在汎化）

①　$F(u) \quad \to \quad \exists x F(x)$　（uは任意の個体）

②　$F(a) \quad \to \quad \exists x F(x)$　（aは特定の個体）

意味：任意の個体uがF，あるいは，特定の個体aがFならば，あるxについてFである。

■ 例題１

次の推論は妥当であることを示せ。

すべての人間は死ぬ。

太郎は人間である。

∴　太郎は死ぬ。

（解法）

$F(x)$＝「xは人間である」，$G(x)$＝「xは死ぬ」，a＝「太郎」とする。

推論式：$\forall x(F(x) \to G(x))$，$F(a)$　　∴　$G(a)$

⑴	$\forall x(F(x) \to G(x))$	前提
⑵	$F(a)$	前提
⑶	$F(a) \to G(a)$	⑴∀_
⑷	$G(a)$	⑵⑶

よって，推論は妥当である。

■ 例題２

次の推論は妥当であることを示せ。

すべての哲学者は正直である。

すべての論理学者は哲学者である。

∴　すべての論理学者は正直である。

（解法）

$F(x)$＝「xは哲学者である」，$G(x)$＝「xは正直である」，$H(x)$＝「xは論理学者である」とする。

推論式：$\forall x(F(x) \to G(x))$，$\forall x(H(x) \to F(x))$　　∴　$\forall x(H(x) \to G(x))$

(1)　$\forall x(F(x) \to G(x))$　　前提
(2)　$\forall x(H(x) \to F(x))$　　前提
(3)　$F(u) \to G(u)$　　(1)$\forall_{-}$
(4)　$H(u) \to F(u)$　　(2)$\forall_{-}$
(5)　$H(u) \to G(u)$　　(4)(3)
(6)　$\forall x(H(x) \to G(x))$　　(5)$\forall_{+}$

よって，推論は妥当である。

■ 例題３

次の推論は妥当であることを示せ。

すべての輸入車は高い。
∴　高くないものはすべて輸入車ではない。

（解法）

$F(x)$＝「x は輸入車である」，$G(x)$＝「x は高い」とする。

推論式：$\forall x(F(x) \to G(x))$　　∴　$\forall x(\sim G(x) \to \sim F(x))$

(1)　$\forall x(F(x) \to G(x))$　　前提
(2)　$F(u) \to G(u)$　　(1)$\forall_{-}$
(3)　$\sim G(u) \to \sim F(u)$　　(2)対偶
(4)　$\forall x(\sim G(x) \to \sim F(x))$　　(3)$\forall_{+}$

よって，推論は妥当である。

● 例題４

次の推論は妥当であることを示せ。

すべてのものは形をもつ。
∴　形をもつものがある。

（解法）

$F(x)$＝「x は形をもつ」とする。

推論式：$\forall xF(x)$　　∴　$\exists xF(x)$

(1)　$\forall xF(x)$　　前提
(2)　$F(a)$　　(1)$\forall_{-}$
(3)　$\exists xF(x)$　　(2)$\exists_{+}$

よって，推論は妥当である。

● 例題５

次の推論は妥当であることを示せ。

　すべてのクルマは国産品である。

　高級なクルマがある。

∴　高級な国産品がある。

（解法）

$F(x)$ =「x はクルマである」，$G(x)$ =「x は国産品である」，$H(x)$ =「x は高級である」とする。

推論式：$\forall x(F(x) \to G(x))$，$\exists x(F(x) \wedge H(x))$　　∴　$\exists x(H(x) \wedge G(x))$

(1)	$\forall x(F(x) \to G(x))$	前提
(2)	$\exists x(F(x) \wedge H(x))$	前提
(3)	$F(a) \wedge H(a)$	(2)$\exists_-$
(4)	$F(a) \to G(a)$	(1)$\forall_-$
(5)	$F(a)$	(3)
(6)	$G(a)$	(4)(5)
(7)	$H(a)$	(3)
(8)	$H(a) \wedge G(a)$	(6)(7)
(9)	$\exists x(H(x) \wedge G(x))$	(8)$\exists_+$

よって，推論は妥当である。

6.　分析タブロー

前述したように，述語論理では，推論の妥当性の判定問題は一般には解けない。タブローを使っても解けない。ただし，タブローは，推論が妥当であることを示す別の証明法としては，便利である。

真のみの論理式を描いた真理木を，タブローと呼んだ。前述した 4 つの規則をタブローで書けば，次のようになる。

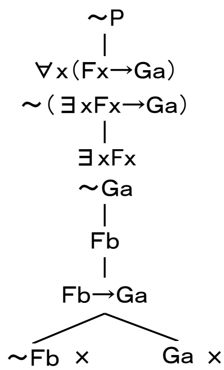
(1)　全称消去（全称例化）	(2)　全称導入（全称汎化）
∀ｘＦｘ ｜ Ｆｕ （ｕは任意の個体） ∀ｘＦｘ ｜ Ｆａ （ａは特定の個体）	Ｆｕ ｜ ∀ｘＦｘ （ｕは任意の個体）

⑶　存在消去（存在例化）	⑷　存在導入（存在汎化）	
∃ｘＦｘ │ Ｆａ （ａは特定の個体）	Ｆｕ │ ∃ｘＦｘ （ｕは任意の個体）	Ｆａ │ ∃ｘＦｘ （ａは特定の個体）

●例題１

次の推論が妥当であることを示せ。

∀ｘ（Ｆｘ→Ｇａ）　∴　∃ｘＦｘ→Ｇａ



(解法)

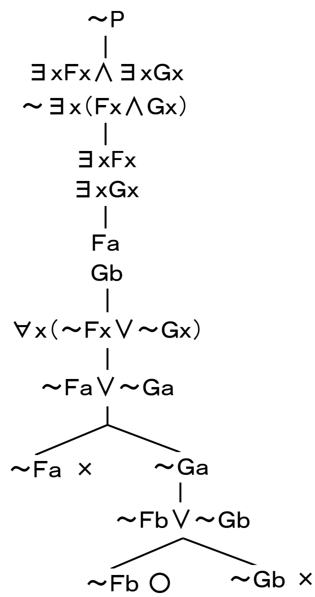
推論式を P とする。P が０と仮定すると，タブローでは矛盾が発生するので，P は常に１である。よって，推論は妥当である。

(どのような個体領域でも P は１であることに注意)

●例題２

次の推論の妥当性を判定せよ。

∃ｘＦｘ∧∃ｘＧｘ　∴　∃ｘ（Ｆｘ∧Ｇｘ）



(解法)

p.84 の例題から，この推論は妥当ではないが，タブローで考えてみる。

推論式を P とする。P が０と仮定すると，枝先の ～Ｆｂ では矛盾が発生しない。

さて，この時点で，「$\sim P$ が１になる場合があるので，推論は妥当ではない」と判断してもよいだろうか。

つまり，

・Ｆａ，Ｇｂがともに１

・Ｆｂ，Ｇａがともに０

であるような解釈が存在すれば，確かに $\sim P$ は１になるが，そのような解釈が存在するのだろうか。

結論を言えば，そのような解釈は必ず存在する（次の節を参照）。従って，分析タブローで，矛盾が発生せず最後まで枝が延びた場合には，$\sim P$ が１になる場合がある，従って，推論は妥当でないと判断してよい。

● 問題

次の推論の妥当性を，タブローで判定せよ。

(1)　$\exists x(F(a) \to G(x))$　　∴　$F(a) \to \exists x G(x)$

(2)　$\exists x(F(x) \land G(x))$　　∴　$\forall x F(x) \land \exists x G(x)$

7.　妥当でないことを示す別な方法

論理式が妥当でないことを示す 1 つの方法は，それが偽になるような解釈 I を 1 つ与えることであった。その場合，個体領域 D =「人間の集合」，$F(x)$ =「x は男性である」というような，現実的な解釈を考えてもよいが，真理値に着目した形式的な解釈を作ることもできる。

例えば，個体領域 D が有限集合の場合は，D は次のように表現できる。

$$D = \{ a_1, a_2, \cdots, a_n \}$$

ここで，a_1, a_2, $\cdots$, a_n が個体定項であり，全部で n 個である。

このとき，$\forall x F(x)$ や $\exists x F(x)$ が 1（真）であるとは，以下の意味になる。

①　$\forall x F(x)$ が 1　⇔　D に属する任意の個体 u に対して $F(u)$ が 1
　　⇔　$F(a_1)$，$F(a_2)$，$\cdots$，$F(a_n)$ がすべて 1
　　⇔　$F(a_1) \land F(a_1) \land \cdots \land F(a_n)$ が 1

②　$\exists x F(x)$ が 1　⇔　D に属するある個体 a に対して $F(a)$ が 1
　　⇔　$F(a_1)$，$F(a_2)$，$\cdots$，$F(a_n)$ のいずれかが 1
　　⇔　$F(a_1) \lor F(a_1) \lor \cdots \lor F(a_n)$ が 1

従って，個体領域 D のもとでは，$\forall x F(x)$ と $F(a_1) \land F(a_1) \land \cdots \land F(a_n)$ の真理値は一致するので，両者の論理式は等しい。$\exists x F(x)$ も同様である。

● 個体領域が有限集合 $D = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ の場合

(1)　$\forall x F(x) = F(a_1) \land F(a_1) \land \cdots \land F(a_n)$

(2)　$\exists x F(x) = F(a_1) \lor F(a_1) \lor \cdots \lor F(a_n)$

特に，$D = \{a, b\}$（個体の個数が 2 個）の場合は，次のようになる。

$$\forall x F(x) = F(a) \land F(b), \quad \exists x F(x) = F(a) \lor F(b)$$

この場合は，次の 2 つの論理式は同じ意味になる。

○　$\exists x F(x) \to \forall x F(x)$

○　$F(a) \lor F(b) \to F(a) \land F(b)$

よって，後者の論理式が偽になる場合があることを示せばよい。

● 例題 1

次の論理式が妥当でないことを示せ。

$$\exists x F(x) \to \forall x F(x)$$

（解法）

個体領域を $D = \{a, b\}$ とし，命題関数 $F(x)$ を次のように定める。

$$F(a) = 1, \quad F(b) = 0$$

すなわち，$F(a)$ が真，$F(b)$ が偽になるような $F(x)$ を考える。このとき，$\exists x F(x)$ は 1 で，$\forall x F(x)$ は 0 になるので，与えられた論理式は 0 になる。よって，論理式は妥当ではない。

（注意）

解法としては上記で十分である。なぜなら，論理式が妥当であるとは，いかなる個体領域であっても，あるいは，上記のように形式的に定義されたいかなる命題関数であっても，論理式が常に 1 になることを意味するからである。上記では，与えられた論理式が偽になる例を示しているので，論理式は妥当ではない。

$F(a) = 1$，$F(b) = 0$ となるような命題関数 $F(x)$ は必ず存在する。例えば，「x は a である」を $F(x)$ とすればよい。

次の解釈 I で考えても，その解釈のもとでは例題の論理式は偽になる。

解釈 I：個体領域 D ＝｛太郎，花子｝（太郎は男性，花子は女性とする）
$F(x)$ ＝「x は男性である」

● 例題２

次の推論が妥当でないことを示せ。

$$\forall x (F(x) \vee G(x)) \quad \therefore \quad \forall x F(x) \vee \forall x G(x)$$

（解法）

個体領域を $D = \{a, b\}$ とすれば，与えられた推論は次と同じになる。

$$(F(a) \vee G(a)) \wedge (F(b) \vee G(b)) \qquad \therefore \quad (F(a) \wedge F(b)) \vee (G(a) \wedge G(b))$$

従って，命題関数 $F(x)$，$G(x)$ を

$$F(a) = 1, \quad F(b) = 0$$
$$G(a) = 0, \quad G(b) = 1$$

と定めれば，$\forall x (F(x) \vee G(x))$ は 1，$\forall x F(x) \vee \forall x G(x)$ は 0 になるので，推論は妥当でない。