8.　真理木による真理値分析

1.　真理木とは

真理木（truth tree）による真理値分析は，よく行われる。真理木は，「真理の木」と呼ばれることもある。一見，難しそうな話だが，内容は全く簡単である。

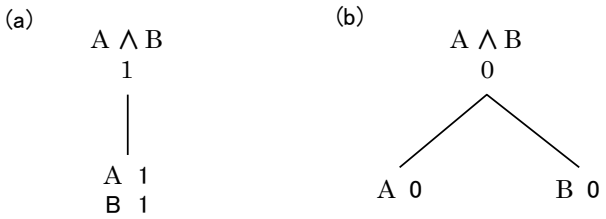
連言 $A \wedge B$ で説明しよう。次のことは自明であろう。

(a)「 $A \wedge B$ は 1」は，「A は 1，かつ， B は 1」と同値である。
(b)「 $A \wedge B$ は 0」は，「A は 0，または， B は 0」と同値である。

この(a)，(b)の状態を，木という図で表現したものを「真理木」と呼ぶ。人によって真理木の書き方は少し異なるが，次のルールがある。

(※)「かつ」の場合は 1 本の枝を下に延ばし，「または」の場合は 2 本の枝を下に延ばす。

例えば，上記の(a)，(b)の真理木は，下図のようになる。



図の(a)で説明しよう。上にある $A \wedge B$ は，「$A \wedge B$ が 1」という状態を表す。下の A, B は，「A が 1，かつ， B が 1」という状態を表す。縦に A，B が並んでいるが，それは「かつ」を意味する。上の状態と下の状態は同値であるので，枝は 1 本しかない。そして，その枝を通って，上から下に進むことができ，下から上に進むこともできる。

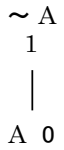
一方，図の(b)については，上の $A \wedge B$ は，「$A \wedge B$ が 0」という状態を表す。下の A, B は，「A が 0，または， B が 0」という状態を表す。横に A，B が並んでいるが，それは「または」を意味する。上の $A \wedge B$ からは，下の A または B に進むことができる。 A と B の両方に進むことができる場合もあれば，一方にしか進めない場合もある。しかし，下の A, B のどちらからでも上の $A \wedge B$ に進むことはできる。

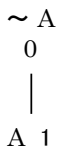
(a)，(b)のような論理記号から作られる真理木では，上の状態の同値性を下に書いているだけである。図における 1 と 0 は，どこに書いてもよい。面倒であれば，枝も省略してもよい。しかし，ミスを防ぐためには，やはり真理木はきちんと書いた方がよいだろう。

2.　基本的な真理木

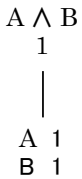
以下が 5 つの論理記号の真理木である。よく理解しておくとよい。

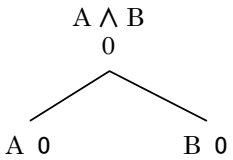
● 否定 ～A の真理木



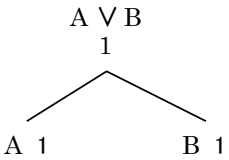


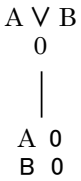
● 連言 $A \wedge B$ の真理木



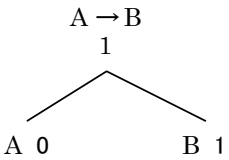


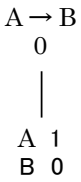
● 選言 $A \vee B$ の真理木



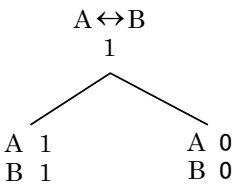


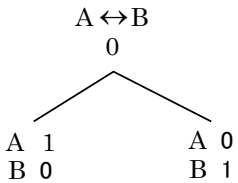
● 条件文 $A \rightarrow B$ の真理木





● 双条件文 $A \leftrightarrow B$ の真理木





3.　真理木の使い方

真理木を使って，いくつか例題をやってみよう。ポイントは，与えられた論理式を出発点として，「否定」「連言」「選言」「条件文」「双条件文」が登場した場合は，それらの真理木を書いていくことである。

（例１）次の命題が恒真であることを示せ。（恒真の判定）

$$(A \wedge B) \rightarrow B$$

（解説）背理法でやればよい。つまり，論理式が 0 になる場合があると仮定して，矛盾を導く。そこで，真理木を書いてみる。図のように矛盾が発生したので，命題は恒真である。

解答としては，これで終わりである。何をやっているか説明しよう。

① (A ∧ B)→B
0
|
② A∧B 1
③ B 0
|
④ A 1
⑤ B 1 ×

(1) 論理式が 0 になる場合があると仮定して，①を書く。
(2) ①は条件文なので，条件文の真理木②③を書く。
(3) 連言②が登場したので，連言の真理木④⑤を書く。（③から枝を延ばせばよい。③自体はそこでストップ。）
(4) 現在，②と③が成立している。また，④⑤も成立している。しかし，⑤の B の値 1 は，③に矛盾する。矛盾した値には，（×）をつける。矛盾が発生したので，与えられた論理式が 0 になることはない。つまり，常に 1 になるので，恒真である。

（例２）次の命題が恒偽ではないことを示せ。（恒偽ではないことの判定）

$$\sim(A \vee B) \wedge \sim A$$

（解説）恒偽であるとは，論理式が常に 0 になることである。従って，「恒偽ではない」とは，論理式が 1 になる場合があるということである。ここでの証明は背理法ではなく，論理式が 1 になる場合があることを示すことである。

① ～(A∨B)∧～A
1
|
② ～(A∨B) 1
③ ～A 1
|
④ A 0
|
⑤ A∨B 0
|
⑥ A 0
⑦ B 0

(1) 論理式が 1 になる場合があると仮定して，①を書く
(2) ①から連言の真理木②③を書く。
(3) ③から否定の真理木④を書く。（②と③はともに否定だが，どちらの真理木から書いてもよい。）
(4) ②から否定の真理木⑤を書く。（④から枝を延ばす。）
(5) ⑤から選言の真理木⑥⑦を書く。
(6)（×）は登場しないので，どこにも矛盾は発生していない。④⑥⑦で，A と B の値は確定しているが，これらの値で②と③は成立する。つまり，A が 0，B が 0 のときは，①の論理式は 1 になるので，命題は恒偽ではない。

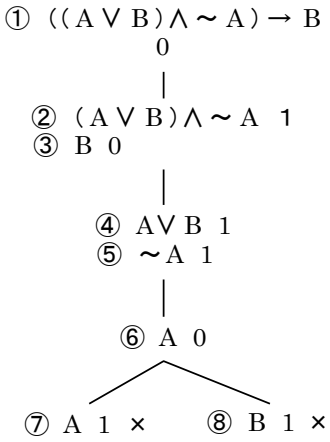
前述の 2 つの例では，最初の論理式から延びた枝は枝分かれせずに，1 本の直線として延びている。その場合，直線上の内容（各命題の真理値）はすべて同時に成立していることになる。次の例は，枝分かれする場合である。

（**例３**）次の命題が恒真であることを示せ。（恒真の判定）

$$((A \vee B) \wedge \sim A) \rightarrow B$$

（解説）論理式が 0 になる場合があると仮定して，矛盾を導く。

(1) 論理式が 0 であると仮定して，①を書く。
(2) ①から双条件文の真理木②③を書く。
(3) ②から連言の真理木④⑤を書く。
(4) ⑤から否定の真理木⑥を書く。（④と⑤の状態の場合，最初に枝分かれしない真理木を書く方が一般には簡単になる。）
(5) ④から選言の真理木⑦⑧を書く。（⑥から枝を延ばす。）
(5) 現在，①～⑥のすべてが成立している。そして，⑦または⑧が成立する。⑦が成立すれば，それは⑥に矛盾する。⑧が成立すれば，それは③に矛盾する。いずれにせよ矛盾が発生するので，与えられた論理式が 0 になることはない。従って，恒真である。



4.　真理木における論法

与えられた論理式を P とする。真理木を使うと，以下のことがわかる。

P の真理値	真理木	解釈	判定
1 と仮定	矛盾が起こる	P の真理値が 1 になることはない（P の真理値は常に 0）	P は恒偽命題である
	矛盾が起こらない	P の真理値が 1 になることがある（真理木でわかる）	P は恒偽命題でない（恒真または偶然的）
0 と仮定	矛盾が起こる	P の真理値が 0 になることはない（P の真理値は常に 1）	P は恒真命題である
	矛盾が起こらない	P の真理値が 0 になることがある（真理木でわかる）	P は恒真命題でない（恒偽または偶然的）

一般に，真理木は，命題 P の恒真性の判定に使用される。従って，通常は P の真理値が 0 であると仮定して，真理木を書くことになる。

（**例１**）次の命題が恒真であることを示せ。（恒真の判定）

$$((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \rightarrow (A \wedge (B \vee C))$$

（解説）

(1) 論理式が 0 であると仮定して，①を書く。

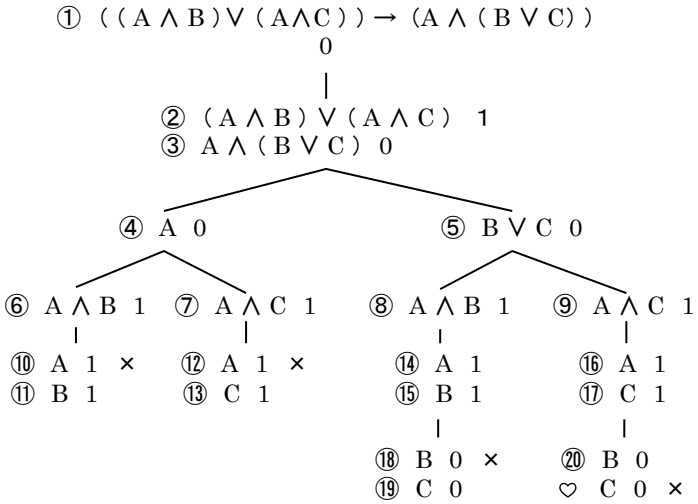
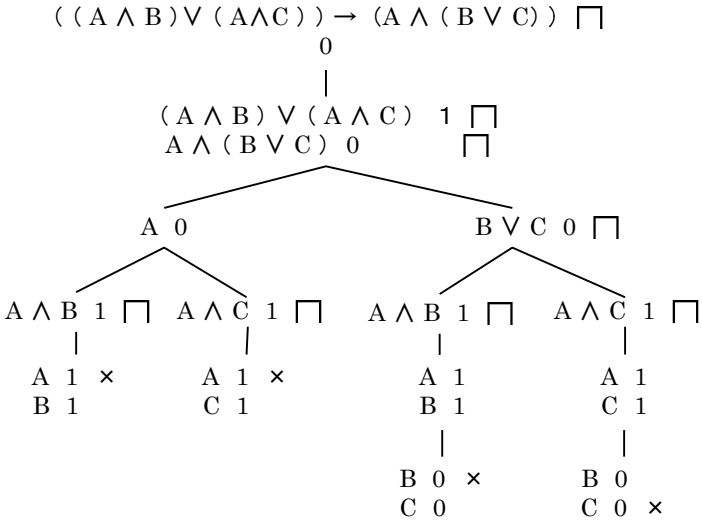
(2) ①から②③を書く。③から④⑤を書く。

(3) ②から⑥⑦を書く（④が出発点）。②から⑧⑨を書く（⑤が出発点）。

(4) ⑥から⑩⑪を書く。⑦から⑫⑬を書く。⑧から⑭⑮を書く。⑨から⑯⑰を書く。

(5) ⑤から⑱⑲を書く（⑮が出発点）。⑤から⑳㉑書く（⑰が出発点用）。

(6) 枝分かれした先では常に矛盾が発生しているので，命題は恒真である。



なお，番号を書かずに，真理木を完全に適用した論理式にはチェックマーク（✔）を付けていき，以下のように書いてもよい。